Teknillinen korkeakoulu
Matematiikan laitos

Nevanlinna/Ruotsalainen

# Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet

## 2. välikoe, 13.12.2008

*Koeaika 3 tuntia. Laskimet eivät ole sallittuja.* **English version overleaf.**

1. Olkoon $S$ siirto eteen $l^p$:ssä ($1 < p < \infty$):

$$S : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Tarkastele, suppeneeko operaattorijono $\{S^n\}_{n\geq 1}$ (missä $S^n = SS^{n-1}$)

(a) tasaisesti (operaattorinormissa),

(b) vahvasti,

(c) heikosti.

Jos vastauksesi on "kyllä", niin kerro vastaava raja-arvo.

2. Määritellään avaruudessa $l^2$ siirto-operaattorit $S$ ja $S^*$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} Sx &= (0, \xi_1, \xi_2, \ldots), \\ S^*x &= (\xi_2, \xi_3, \ldots), \end{aligned}$$

missä $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Tällöin $S^*$ on $S$:n Hilbert-adjungaatti. Osoita, että

(a) $\sigma_p(S) = \emptyset$ ja $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} =: \mathbb{D}$,

(b) $\sigma(S) = \sigma(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$,

(c) $\partial\mathbb{D} \subset \sigma_a(S)$, $\partial\mathbb{D} \subset \sigma_a(S^*)$ ja määritä vastaavat approksimatiiviset ominaisvektorit.

3. Olkoon annettuna lineaarioperaattori $T$ Banachin avaruudessa $l^1$ normaalikannan $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ avulla siten, että

$$Te_n := \alpha_n(e_n + e_{n+1} + \cdots + e_{2n})$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tässä $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ jne. Anna riittävät ja välttämättömät ehdot jonolle $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $\alpha_n \in \mathbb{C}$, siten, että

(a) $T \in \mathcal{B}(l^1)$

(b) $T \in \mathcal{K}(l^1)$

(c) $T \in \mathcal{F}(l^1)$

Perustele vastauksesi.

Helsinki University of Technology
Institute of Mathematics

Nevanlinna/Ruotsalainen

# Mat-1.3460 Principles of Functional Analysis

## $2^{\text{nd}}$ mid-term exam, 13.12.2008

*Exam time 3 hours. Calculators are not allowed.* **Suomeksi kääntöpuolella.**

1. Let $S$ be the right shift in $l^p$ $(1 < p < \infty)$:

$$S : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Examine if the sequence of operators $\{S^n\}_{n\geq 1}$ (where $S^n = SS^{n-1}$) converges

(a) uniformly (in operator norm),

(b) strongly,

(c) weakly.

If your answer is "yes", specify the corresponding limit.

2. Define in the space $l^2$ shift operators $S$ and $S^*$ as follows:

$$\begin{aligned} Sx &= (0, \xi_1, \xi_2, \ldots), \\ S^*x &= (\xi_2, \xi_3, \ldots), \end{aligned}$$

where $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Then $S^*$ is the Hilbert-adjoint of $S$. Show that

(a) $\sigma_p(S) = \emptyset$ and $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} =: \mathbb{D}$,

(b) $\sigma(S) = \sigma(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$,

(c) $\partial\mathbb{D} \subset \sigma_a(S)$, $\partial\mathbb{D} \subset \sigma_a(S^*)$ and specify the corresponding approximate eigenvectors.

3. Let a linear operator $T$ on the Banach space $l^1$ be given with respect to the normal basis $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ such that

$$Te_n := \alpha_n(e_n + e_{n+1} + \cdots + e_{2n})$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Here $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ etc. Give necessary and sufficient conditions for the sequence $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, where $\alpha_n \in \mathbb{C}$, to have

(a) $T \in \mathcal{B}(l^1)$

(b) $T \in \mathcal{K}(l^1)$

(c) $T \in \mathcal{F}(l^1)$

Justify your answers.