Teknillinen korkeakoulu
Matematiikan laitos

Nevanlinna/Ruotsalainen

Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet

1. välikoe, 25.10.2008

Koeaika 2 tuntia. Laskimet eivät ole sallittuja. **English version overleaf.**

1. Olkoon $X := C[0,1]$ Banachin avaruus normilla $\|f\| = \max_{0\le t\le 1}|f(t)|$. Annetaan lineaarinen operaattori $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Af)(t) = \int_0^t e^{t-s} f(s)\, ds.$$

   (a) Näytä, että $A \in \mathcal{B}(X)$, ja määrää sen normi $\|A\|$.

   (b) Näytä käyttäen derivointia, että A on injektio.

   (c) Näytä, että A ei ole surjektio.

2. Olkoon X Banachin avaruus.

   (a) Määrittele duaali X' ja biduaali X'' sekä selitä, mitä tarkoitetaan väitteellä $X \subset X''$.

   (b) Määrittele käsite refleksiivinen avaruus ja kerro, mitkä l^p-avaruudet ovat refleksiivisiä ja mitkä ovat niiden duaalit. (Ei tarvitse perustella.)

3. Olkoon $X = \mathbb{R}^2$. Oletetaan annetuksi ei-tyhjä kompakti joukko $K \subset \mathbb{R}^2$ ja jokin avaruuden $\mathbb{R}^2$ normi $\|\cdot\|$.

   (a) Perustele, miksi jokaisella $a \in \mathbb{R}^2$ löytyy K:sta pistettä a lähimpänä oleva piste.

   (b) Näytä, että jos X:n normi on maksiminormi, $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, ja K on X:n yksikköpallo, $K = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$, niin lähimmän pisteen ei tarvitse olla yksikäsitteinen.

   (c) Kurssilla on näytetty, että jos K on Hilbertin avaruuden konveksi suljettu ei-tyhjä joukko, jokaista avaruuden pistettä kohti on olemassa K:ssa yksikäsitteinen lähin piste. Näytä tämä yksikäsitteisyys tässä tapauksessa. Toisin sanoen näytä, että jos $\mathbb{R}^2$:n normi on sisätulon antama ja K on suljettu ja konveksi, niin lähin piste on yksikäsitteinen.

Helsinki University of Technology
Institute of Mathematics

Nevanlinna/Ruotsalainen

Mat-1.3460 Principles of Functional Analysis

1st mid-term exam, 25.10.2008

Exam time 2 hours. Calculators are not allowed. **Suomeksi kääntöpuolella.**

1. Let $X := C[0,1]$ be a Banach space with the norm $\|f\| = \max_{0\le t\le 1} |f(t)|$. Assume given a linear operator $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Af)(t) = \int_0^t e^{t-s} f(s)\, ds.$$

   (a) Show that $A \in \mathcal{B}(X)$ and calculate its norm $\|A\|$.

   (b) Using derivation show that A is one-to-one (injective).

   (c) Show that A is not onto (surjective).

2. Let X be a Banach space.

   (a) Define the dual X' and the bidual X'', and explain what is meant by the claim $X \subset X''$.

   (b) Define the concept reflexive space, and tell which l^p spaces are reflexive and what are their duals. (Proofs not required.)

3. Let $X = \mathbb{R}^2$. Assume given a nonempty compact set $K \subset \mathbb{R}^2$ and some norm $\|\cdot\|$ in the space $\mathbb{R}^2$.

   (a) Explain why for every $a \in \mathbb{R}^2$ there is a point in K closest to the point a.

   (b) Show that if the norm in X is the maximum-norm, $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, and K is the unit ball of X, $K = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$, then the closest point does not have to be unique.

   (c) It has been shown in the course that if K is a nonempty convex and closed subset of a Hilbert space, then for every given point there exists a unique closest point in K. Show this uniqueness in this case. In other words, show that if the norm in $\mathbb{R}^2$ is given by an inner product and K is convex and closed, then the closest point is unique.