Teknillinen korkeakoulu
Matematiikan laitos

Nevanlinna/Ruotsalainen

Mat-1.3460 Funktionaalianalyysin perusteet

Tentti, 17.1.2009

Koeaika 4 tuntia. Laskimet eivät ole sallittuja. **English version overleaf.**

1. Määritellään avaruudessa l^2 siirto-operaattori "taaksepäin" S^* seuraavasti:

$$S^* : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

   (a) Määrää $\operatorname{Ker} S^* = \{x \in l^2 : S^* x = 0\}$. Onko $\operatorname{Ker} S^*$ suljettu? Perustele.

   (b) Määrää $\mathcal{R}(S^*) = \{y \in l^2 : \exists a \in l^2 \text{ s.e. } S^* a = y\}$. Onko $\mathcal{R}(S^*)$ suljettu? Perustele.

   (c) Näytä, että $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ ja että $\sigma_a(S^*) = \sigma(S^*)$.

   Tarkastellaan sitten jonoa $\{(S^*)^n\}_{n \geq 1}$ (missä $(S^*)^n = S^*(S^*)^{n-1}$).

   (d) Suppeneeko se heikosti?

   (e) Suppeneeko se vahvasti?

   (f) Suppeneeko se tasaisesti (operaattorinormissa)?

   Jos vastauksesi on kyllä, kerro vastaava raja-arvo.

2. Olkoon H kompleksinen Hilbertin avaruus ja $C \subset H$ epätyhjä joukko. Todista, että

$$C^{\perp} := \{x \in H : x \perp y \text{ kaikilla } y \in C\}$$

   on suljettu aliavaruus.

3. Olkoon X Banachin avaruus. Asetetaan kaikille $x \in X$

$$j(x) := \{f \in X' : f(x) = \|x\|_X^2 = \|f\|_{X'}^2\}.$$

   Selitä, miten Hahn-Banachin lauseesta seuraa, että $j(x) \neq \emptyset$.

4. Olkoon H kompleksinen Hilbertin avaruus siten, että $\dim H = \infty$. Silloin $A \in \mathcal{B}(H)$ ei voi yhtä aikaa olla sekä kompakti että unitaarinen. Määrittele käsitteet ja perustele, miksei voi olla.

Helsinki University of Technology
Institute of Mathematics

Nevanlinna/Ruotsalainen

Mat-1.3460 Principles of Functional Analysis

Exam, 17.1.2009

Exam time 4 hours. Calculators are not allowed. **Suomeksi kääntöpuolella.**

1. Define in the space l^2 the shift operator "backwards" S^* as follows:

$$S^* : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

   (a) Determine $\operatorname{Ker} S^* = \{x \in l^2 : S^*x = 0\}$. Is $\operatorname{Ker} S^*$ closed? Justify.

   (b) Determine $\mathcal{R}(S^*) = \{y \in l^2 : \exists a \in l^2 \text{ s.t. } S^*a = y\}$. Is $\mathcal{R}(S^*)$ closed? Justify.

   (c) Show that $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ and that $\sigma_a(S^*) = \sigma(S^*)$.

   Examine then the sequence $\{(S^*)^n\}_{n\geq 1}$ (where $(S^*)^n = S^*(S^*)^{n-1}$).

   (d) Does it converge weakly?

   (e) Does it converge strongly?

   (f) Does it converge uniformly (in operator norm)?

   If your answer is "yes", specify the corresponding limit.

2. Let H be a complex Hilbert space and $C \subset H$ a nonempty set. Show that

$$C^{\perp} := \{x \in H : x \perp y \text{ for all } y \in C\}$$

   is a closed subspace.

3. Let X be a Banach space. Set for all $x \in X$

$$j(x) := \{f \in X' : f(x) = \|x\|_X^2 = \|f\|_{X'}^2\}.$$

   Explain how it follows from the Hahn-Banach theorem that $j(x) \neq \emptyset$.

4. Let H be a complex Hilbert space such that $\dim H = \infty$. Then $A \in \mathcal{B}(H)$ cannot be at the same time compact and unitary. Define the concepts and justify why it cannot.