TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Systeemianalyysin laboratorio

Mat-2.139 Optimointioppi Kimmo Berg *Tentti, 11.01.2007*

1. Määritä
   a) separoiva hypertaso, b) kvasi-Newton ehto, c) konvergenssiaste,
   d) epigraafi ja selitä lyhyesti e) eksakti sakkofunktio ja f) Armijon sääntö.

2. a) Osoita että konveksin rajoittamattoman tehtävän lokaali minimi on globaali.

   b) Kirjoita konveksin rajoittamattoman tehtävän optimaalisuusehto aligradienttien (määritä!) avulla. Miten ehto sievenee jos funktio on differentioituva?

   c) Tutki edellisen avulla onko $\mathbf{0}$ tehtävän $\min \|\mathbf{x}\|$ ratkaisu?

   d) Määritä konveksi optimointitehtävä ja kirjoita sille optimaalisuusehto aligradienttien avulla.

3. a) Esitä tehtävän

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.e.} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, l \end{array}$$

   välttämättömät KKT-ehdot.

   b) Tutki toteuttaako piste $(1, 0)$ tehtävän

$$\begin{array}{ll} \min & x^2 + y^2 \\ \text{s.e.} & y^2 - (x-1)^3 \leq 0, \quad i = 1, \ldots, l \end{array}$$

   välttämättömät KKT-ehdot. Mitä voit tästä päätellä? Onko piste tehtävän ratkaisu?

4. a) Selosta millaisille rajoittamattoman optimoinnin tehtäville on soveliainta käyttää Newton, kvasi-Newton ja konjugaattigradienttimenetelmiä. Menetelmien esittäminen ei ole välttämätöntä. Kuinka monta funktioevaluointia per askel tarvitaan Newtonin menetelmässä kun käytetään seuraavia differenssiapproksimaatioita: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \approx \frac{f(x+\epsilon e_i+\epsilon e_j)-f(x+\epsilon e_i)-f(x+\epsilon e_j)+f(x)}{\epsilon^2}$ ja $\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x+\epsilon e_i)-f(x)}{\epsilon}$.

   b) Esitä toistetun kvadraattisen optimoinnin menetelmä (*sequential quadratic programming*, SQP) tehtävälle

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.e.} & h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, l. \end{array}$$

KÄÄNNÄ!

5. a) Pystytkö redusoimaan kuluttajan maksimointitehtävän

$$\begin{array}{ll} \max & u(x_1, x_2) \\ \text{s.e.} & I - p_1 x_2 - p_2 x_2 \geq 0, \quad i = 1, \ldots, l \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

yhtälörajoitetuksi tehtäväksi kun x_i on hyödykkeen i kulutus, $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ kuluttajan hyötyfunktio, $I > 0$ kuluttajan varallisuus, ja $p_i > 0$ hyödykkeen i hinta? Mitä jos $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$?

b) Olkoon kuluttajan hyötyfunktio $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_1 x_2$, varallisuus $I = 100$, yksikköhinnat $p_1 = 4$ ja $p_2 = 5$. Määritä hyödyn maksimoiva kulutus.

c) Mikä on optimaalinen kulutus kun valtiolta on mahdollisuus ostaa summalla a kuponki jolla kuluttaja saa ostaa hyödykettä 1 hintaan $p_1 = 3$? Millä a:n arvoilla kuluttaja ostaa kupongin? Milloin kuluttaja on indifferentti vaihtoehtojen välillä?

Vinkki: Ratkaise optimaaliset kulutukset numeerisesti esim. yhdellä desimaalilla.