Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.1410 Matematiikan peruskurssi P1
Turunen/Kaila

Uusintavälikokeet ja tentti 15.1.2009 klo 13-17.

Tentti: tehtävät 1, 3, 5, 7, 9.
1. välikoe: tehtävät 1,2,3.
2. välikoe: tehtävät 4,5,6.
3. välikoe: tehtävät 7,8,9.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet on kielletty!

1. Olkoon S avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora, joka kulkee pisteiden $p = (1, 2, 3)$ ja $q = (6, 5, 4)$ kautta. Olkoon T avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, jossa ovat pisteet p, q ja origo o.

   a) Etsi piste $x = (x_1, x_2, x_3)$, joka on suoralla S lähinnä origoa.

   b) Etsi kaikki sellaiset vektorit, joiden pituus on 1 ja jotka ovat kohtisuorassa tasoa T vastaan.

2. Kirjoita yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 6x + 5y + 4z = 3, \\ y - z = 1, \end{cases}$$

   matriisimuodossa ja ratkaise se Gauss-eliminaation avulla.

3. Olkoot $[A] = [P][C][P]^{-1}$ ja $[B] = [P][D][P]^{-1}$, missä

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ja } [P] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Laske matriisitulo $[A][B]$.

Tehtävät 4–9 paperin toisella puolella!

4. Olkoon $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-kx^2}$.

   a) Millä luvuilla $x \in \mathbb{R}$ sarja $f(x)$ suppenee?

   b) Selitä, miksi $\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right) f(x) = 1$ (silloin, kun sarja suppenee).

5. Todista, että funktio f on jatkuva pisteessä $x = 1$, kun

$$f(x) = x^2 - 2x + 2.$$

   (Piirrä kuva — siitä voi olla apua.)

   Muistutus. *Funktion f jatkuvuus pisteessä $x = p$ tarkoittaa seuraavaa:*
   jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$
   siten, että $f(x) \approx f(p)$ tarkkuudella ε,
   jos $x \approx p$ tarkkuudella δ
   (eli $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$, jos $|x - p| < \delta$).

6. Olkoon $f(x) = \ln\left(\mathrm{e} + \sin\left(\pi\, \mathrm{e}^{x^2} \cos(x)\right)\right)$.

   a) Laske derivaatta $f'(x)$.

   b) Mikä on kuvaajan $y = f(x)$ tangenttisuoran yhtälö pisteessä $x = 0$?

$(fg)' = f'g + g'f$

$fg = \int f'g + \int g'f$

$\int f'g = fg - \int g'f$

7. Selitä **integraalin määritelmästä käsin**, mitä tarkoittaa määrätty integraali

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

   Tätä integraalia ei kuitenkaan tarvitse yrittää laskea.
   (Joitakin avainsanoja muistin virkistykseksi:
   välin ositus, pinta-ala, Riemannin ylä- ja alasummat.
   Voit piirtää havainnollistavia kuvia selityksen tueksi.)

8. Laske $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^3 \cos(x)^4\, \mathrm{d}x$ sijoituksen $u = \cos(x)$ avulla.

9. Laske $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2x} \sin(3x)\, \mathrm{d}x$.

Tehtävät 1–3 paperin toisella puolella!