Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Malinen

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti tai välikokeen uusinta 15.1.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Välikoe 1: Tehtävät 1-3.
Välikoe 2: Tehtävät 4-6.
Välikoe 3: Tehtävät 7-9.
Tentti: Tehtävät 1, 2, 4, 5, 7 ja 8.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä. Koeaika on 4h.
Tehtäväpaperi on kaksipuolinen.

1. (a) Määritä kaikki yhtälön $e^z = -4$ ratkaisut kompleksitasossa, eli siis moniarvoisen logaritmin $\ln(-4)$ kaikki arvot.

   (b) Anna esimerkki kompleksitason pisteestä z joka toteuttaa yhtälön $\left|z - \frac{1}{z}\right| = 1$. Missä pisteissä joukko
   $$\left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1}{z}\right| = 1\right\}$$
   leikkaa kompleksitason yksikköympyrän (eli joukon $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$)?

2. Millä vakion c arvoilla yhtälöryhmällä
   $$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 7 \\ 4x + y &= c \\ 2x + 5y - 6z &= 9 \end{cases}$$
   on

   a) äärettömän monta ratkaisua,

   b) täsmälleen yksi ratkaisu,

   c) ei yhtään ratkaisua?

3. Laske A^{2009} diagonalisoimalla A, kun $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.
   Vihje: Vastaukseen on lupa jättää kokonaislukujen isoja potensseja.

4. Ratkaise differentiaaliyhtälö $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = \sin t$ kun $t \geq 0$ alkuehdoilla $x(0) = 1$ ja $x'(0) = 0$.

5. (a) Olkoon $f(t) = \big(\ln(t)\big)^{\ln(t)}$ kun $t > 1$. Määritä $f'(t)$.

   (b) Osoita jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuuden eli "Bolzanon merkinvaihtolauseen" (the intermediate value theorem) avulla, että yhtälöllä
   $$x^3 + a = \cos x$$
   on ratkaisu x kaikilla parametrin arvoilla $a \in \mathbb{R}$.
   Vihje: Piirrä kuva jollain luvun a arvolla. Miten kuvasi muuttuu, jos muutat luvun a arvoa?

$9 \cdot 2 + 1$ $\quad \frac{3}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$

6. (a) Näytä, että $f(x) = x^5 + x$ on injektio (one-to-one) $\mathbb{R}$:ssä, ja laske derivaatan $\left(f^{-1}\right)'(2)$ arvo. Huomaa, että $f(1) = 2$.

   (b) Etsi käyrän $x + 2y + 1 = \frac{y^2}{x-1}$ tangentin yhtälö pisteessä $(2, -1)$.

7. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

   b) Laske joko l'Hospitalin säännöllä tai Taylorin polynomilla raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1-x)}.$$

8. (a) Laske osittaisintegroimalla

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx.$$

   (b) Määritellään $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$ kun $x \neq 0$ ja $f(x) = 0$ kun $x = 0$. Tiedetään, että tämä funktio on äärettömän monta kertaa derivoituva pisteessä $x = 0$ (mitä ei tarvitse osoittaa). Etsi funktion $f(x)$ kolmannen asteen Taylorin polynomi kehityskeskipisteenä $x = 0$.

9. Määritellään funktio $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(t) = 1 - t$ kun $t \in [0, 1]$ ja $f(t) = 0$ kun $t > 1$. Laske tämän funktion Laplace-muunnos

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, dt$$

   jossa $s > 0$.