

Mat-2.2103 Koesuunnittelu ja tilastolliset mallit

Heliövaara
tentti 12.5. 2008

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin:

- Mat-2.2103 tentti 12.5. 2008
- opiskelijanumero ja tarkistus kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- koulutusohjelma ja vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
- allekirjoitus

1. a) Alla olevassa taulukossa on esitetty yksisuuntaisessa varianssianalyysissä käytettävät neliösummalausekkeet ja niiden vapausasteiden lukumäärät.

Neliösumma	Vapausaste
$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ji} - \bar{y})^2$	$N - 1$
$SSG = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2$	$k - 1$
$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ji} - \bar{y}_i)^2$	$N - k$

Kaavoissa $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Selitä mistä vapausasteiden lukumäärät seuraavat.

- b) Selitä lyhyesti, miksi yksisuuntaisen varianssianalyysin nollahypoteesia voidaan testata muotoa $F = MSG/MSE$ olevalla testisuureella.
2. Tietyn lisäaineen pitoisuus mustaviinimarjahyytelössä ei saa ylittää arvoa 35 mg/kg. Suuresta hyytelöerästä otetaan 25 näytettä, joiden lisäainepitoisuudet mitataan. Oletetaan mitaustulosten noudattavan normaalijakaumaa odotusarvona todellinen pitoisuus θ ja keskihajontana 4 mg/kg (keskihajonta tunnetaan kokemuksesta). Testataan siis hypoteeseja

$$H_0 : \theta = 35$$

$$H_1 : \theta > 35$$

laskemalla otoksen aritmeettinen keskiarvo \bar{x} .

- a) Millä \bar{x} :n arvoilla H_0 hylätään?
- b) Mikä on testin voimakkuus, kun todellinen keskimääräinen lisäainepitoisuus on 38 mg/kg? (Siis millä todennäköisyydellä H_0 hylätään, kun $\theta = 38$?)
3. Halutaan tutkia, onko viidellä kotiviinilaadulla eroa. Viisi koehenkilöä maistaa kukin yhden kerran jokaista laatua ja antaa sitten viineille pisteet asteikolla 0-100. Maistamisjärjestyksen epäillään vaikuttavan arvosteluun, joten järjestystä päätetään vaihdella systemaattisesti. Esitä sopiva koejärjestely.

Käännä

- NELSÄÄN
4. On testattu alumiinitankojen vetolujuutta. Neljäkymmentä samanlais- ta alumiinitankoa jaettiin satunnaisesti kolmeen yhtä suureen ryhmään. Jokaiselle ryhmälle annettiin eri- laista lämpökäsittelyä ja sen jälkeen mitattiin tankojen vetolujuudet. Saatiin seuraavan- lainen aineisto:

Käsittely			
1	2	3	4
18.9	18.3	21.3	15.9
20.0	19.2	21.5	16.0
20.5	17.8	19.9	17.2
20.6	18.4	20.2	17.5
19.3	18.8	21.9	17.9
19.5	18.6	21.8	16.8
21.0	19.9	23.0	17.7
22.1	17.5	22.5	18.1
20.8	16.9	21.7	17.4
20.7	18.0	21.9	19.0

Tiedetään, että eri käsittelyihin liittyvien havaintojen varianssit ovat yhtä suuret.

- a) Testaa nollahypoteesia

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

- b) Testaa nollahypoteeseja

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 = 0$$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_3 = 0$$

Aputuloksia: $\sum_i \sum_j y_{ij}^2 = 15194.1$, $T_1 = 203.4$, $T_2 = 183.4$, $T_3 = 215.7$

5. Eräessä kokeessa verrattiin kolmea sademäärän mittaukseen käytettävää laitetta. Kullakin laitteella mitattiin sademäärät kuuden sadepäivän aikana. Mittaustulokset (sademäärät mm:nä) on annettu alla olevassa taulukossa.

Laite	1	2	3	4	5	6
A	1.38	9.69	0.39	1.42	0.54	5.94
B	1.42	10.37	0.39	1.46	0.55	6.15
C	1.49	10.59	0.41	1.45	0.65	6.36

Testaa hypoteesia, että mittarit näyttävät keskimäärin samalla tavalla. Käytä testissä merk- itsevyystasoa 0.05.

Aputulos: Kaikkien havaintojen neliöiden summa = $\sum_i \sum_j y_{ij}^2 = 441.02$

1=K

Kaavoja

Yksisuuntainen varianssianalyysi

Neliösomma	Vapausaste
$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{1}{N} T^2$	$N - 1$
$SSG = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} T_i^2 - \frac{1}{N} T^2$	$k - 1$
SSE	$N - k$

Kontrastien testaus

Hypoteesit

$$H_0 : \Gamma = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i = 0$$

$$H_1 : \Gamma = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i \neq 0$$

t-testisuure:

$$t = \frac{\sum_{i=1}^k c_i \bar{y}_i}{\sqrt{MSE \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{n_i}}}$$

jos H_0 pätee, niin $t \sim t(N - k)$.

Kaksisuuntainen varianssianalyysi

Neliösomma	Vapausaste
$SST = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K y_{ijk}^2 - \frac{1}{IJK} T^2$	$IJK - 1$
$SSA = \frac{1}{JK} \sum_{i=1}^I T_i^2 - \frac{1}{IJK} T^2$	$I - 1$
$SSB = \frac{1}{IK} \sum_{j=1}^J T_j^2 - \frac{1}{IJK} T^2$	$J - 1$
$SS = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij}^2 - \frac{1}{IJK} T^2$	
$SSAB$	$(I - 1)(J - 1)$
SSE	$IJ(K - 1)$

$$SS = SSA + SSB + SSAB$$

Latinalaisten neliöiden koasetelma

Neliösomma	Vapausaste
$SST = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P y_{ijk}^2 - \frac{1}{P^2} T^2$	$P^2 - 1$
$SSA = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P T_{..k}^2 - \frac{1}{P^2} T^2$	$P - 1$
$SSR = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P T_{i..}^2 - \frac{1}{P^2} T^2$	$P - 1$
$SSC = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^P T_{.j.}^2 - \frac{1}{P^2} T^2$	$P - 1$
SSE	$(P - 2)(P - 1)$

Satunnaistettu täydellinen lohkoasetelma

Neliösomma	Vapausaste
$SST = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij}^2 - \frac{1}{IJ} T^2$	$IJ - 1$
$SSA = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^I T_i^2 - \frac{1}{IJ} T^2$	$I - 1$
$SSB = \frac{1}{I} \sum_{j=1}^J T_j^2 - \frac{1}{IJ} T^2$	$J - 1$
SSE	$(I-1)(J-1)$

Kaksiasteinen hierarkkinen koeasetelma

Neliösomma	Vapausaste
$SST = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K y_{ijk}^2 - \frac{1}{JK} T^2$	$IJK - 1$
$SSA = \frac{1}{JK} \sum_{i=1}^I T_i^2 - \frac{1}{IJK} T^2$	$I - 1$
$SSB(A) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij}^2 - \frac{1}{JK} T^2$	$I(J-1)$
SSE	$IJ(K-1)$

2² faktorikoe

Neliösomma	Vapausaste
$SST = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n y_{kij}^2 - 4n\bar{y}^2$	$4n - 1$
$SSA = \frac{1}{4n} (ab + a - b - (1))^2$	1
$SSB = \frac{1}{4n} (ab - a + b - (1))^2$	1
$SSAB = \frac{1}{4n} (ab - a - b + (1))^2$	1
SSE	$4(n-1)$