

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Apiola/Tikanmäki

Tentti 16.12.2008

Laskin sallittu (Siis sellainen, joka kelpuutetaan ylioppilaskirjoituksiin)

$$1. \text{ Olkoon } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Lausu b_2 :n ja b_3 :n avulla ehto, jolla yhtälösystemillä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ratkaisu.

(b) Määritä yllä olevalla ehdolla kaikki yhtälösystemin ratkaisut, kun $b_3 = -2$.

2. Olkoon annettu datavektorit $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{y} = [y_0, \dots, y_n]^T$. Tehtävänä on sovittaa dataan astetta $k < n$ oleva polynomi $c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$.

(a) Kirjoita tehtävä ensin ylimääräytyväksi yhtälösystemiksi muotoon $X\mathbf{c} = \mathbf{y}$, ja kirjoita sitten normaaliyhtälösystemi. (Normaaliyhtälöissä esiintyvää matriisituloa ei tietenkään tarvitse yrittäkään yleisessä muodossa laskea.)

(b) Olkoon MATLAB-notaatiolla $\mathbf{x} = 2:5$, $\mathbf{y} = [0 \ 4 \ 10 \ 16]$. Muodosta 1. asteen PNS-polynomi eli PNS-suora. Piirrä datapisteet ja suora samaan kuvaan. (Saatiinhan "häivähdys MATLAB:ia" mukaan!)

$$3. \text{ Olkoon } A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(a) Muodosta diffyhtälösystemin $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ yleinen ratkaisu.

(b) Piirrä faasitasoon ominaisvektorit suuntanuoliseen, hahmottele ainakin 2 vastakkaisiin suuntiin avautuvaa trajektoria, ja selvitä O:n luonne ja stabiiliisuus.

Vihje: Ominaisarvojen suhde paljastaa hyvin trajektorien kulun, kun sitä katsotaan ominaisvektorikoordinaatistossa. Jos otat käyräparametrisi luvun $s = e^{\lambda_1 t}$, niin näet. (λ_1 on (itseisarvoltaan) pienempi ominaisarvo)

$$4. \text{ (a) Muodosta } e^{At} \text{ matriisille } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{(Vihje: Helpointa käyttää}$$

e^{At} -n määrittelmää. Muodosta A :n potensseja ja vertaa tunnettuihin sarjakehitelmiin (joita annettu alla). Pitemmän kaavan kauttaakin saat laskea.)

(b) Kirjoita alkuarvoteltävän $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = [c, 0]^T$ ratkaisulauseke. Mikä faasitason käyräparvi on kyseessä?

(c) Laske *Eulerin menetelmällä* kolme askelta alkupisteestä $(1, 0)$ lähtien askelpituudella $h = 0.1$ ja piirrä vastaava murtoviiva faasitasoon.

5. Sivuiltaan lämpöeristetyin sauvan ($c = 1$) pituus olkoon $L = 1$ Alkuketkellä $t = 0$ sauvalle on vakiolämpötila $f(x) = 50^\circ\text{C}$, $0 < x < L$, ja sen päät sijoitetaan jääveteen, 0°C , ts. sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$ toteuttaa reunaehdot $u(0, t) = u(L, t) = 0$ kaikkina aikoina t .

(a) Eksplisiittinen iteraatiokaava saa yksinkertaisimman muotonsa

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}),$$

kun valitaan $r = 0.5$, missä $r = \frac{k}{h^2}$ ($h = \Delta x$, $k = \Delta t$).

Miten pitkän ajan t_1 kuluttua sauvan kohdassa $x = 0.2$ (ja $x = 0.8$) lämpötila alittaa 40°C ja mikä tuo lämpötila on, kun laskentahila määräytyy askelista $h = 0.1$, $k = 0.005$

(b) Laske pisteessä $x = 0.2$ edellä saadulla arvolla $t = t_1$ lämpötilan approksiimaatio, joka saadaan ottamalla analyttisen sarjaratkaisun ensimmäinen termi.

Ohje: Käsin laskettaessa kannattaa käyttää suoraan annettua differenssikaavaa, eikä ajatella matriisituloa. Älä laske muita kuin ne arvot, joita tarvitaan esitettyyn kysymykseen vastaamiseen. Älä hämmästy, vaikka (a)- ja (b)-kohtien approksiimaatit eivät aivan yksiin osu.

Kaavoja, ohjeita

Lämpöyhtälön $u_t = c^2 u_{xx}$ ratkaisu, kun sauvan pituus L , reunat 0° :ssa ja alkuehtona $u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{c n \pi}{L},$$

missä kertoimet b_n ovat Fourier-sinisarjan kertoimia, jotka ovat:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sarjakehitelmiä:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$