

Ratkaisuissa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta laskujen kulku voidaan arvostelussa selvittää.

Tentissä saa olla mukana kirja: Virkkunen, Säättötekniikan matematiikkaa tai vaihtoehtoisesti Laplace- ja Z-muunnostaulukot. Laskimen käyttö ei ole sallittua.

10 tehtävää.

1. Laplace-muunna

a. $2t^2$ b. te^{-2t} c. $e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)$

2. Piirrä signaalit aikatasossa ja laske niiden laplace-muunnokset

a. $t \cdot u(t-a)$
 b. $(t-a) \cdot u(t-a)$ $u(t-t_0)$ on yksikköaskel hetkellä t_0
 c. $(t-a)u(t)$

3. Käänteismuunna

a. $\frac{1}{s^2(s+1)}$ b. $\frac{e^{-s}}{s^2}$

4. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (a_{12}, a_{21} \text{ vakioita})$$

Laske matriisin karakteristinen polynomi ja totea suoraan laskemalla, että Cayley-Hamiltonin teoreema pätee tässä tapauksessa.

5. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Laske

- A:n determinantti $\det(A)$,
- A:n adjungoitu matriisi $\text{adj}(A)$,
- A:n käänteismatriisi A^{-1}

6. Järjestelmää kuvaa tilaesitys

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

jossa $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [0 \ 1]$

- Muodosta siirtofunktio.
- Määritä järjestelmän navat ja nollat.

7. Diskreettiä järjestelmää kuvaa differenssiyhtälö

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = u(k)$$

- Laske pulssinsiirtofunktio.
- Tutki, onko systeemi stabiili.

8. Epälineaarisen systeemin

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 \sin(u) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 + \cos(u) + 1 \\ y &= x_1^2 + x_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{10} &= 1 \\ x_{20} &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(u_0) &= 1 \\ \cos(u_0) &= 0\end{aligned}$$

tasapainotilassa ohjaussuureella on arvo $u = u_0 = \frac{\pi}{2}$. $\eta_0 = 0$, $\mu_0 = \frac{\pi}{2}$

- Mikä on järjestelmän tasapainotila?
- Linearisoi järjestelmä tasapainotilan ympäristössä tapahtuville pienille muutoksille.

9. Tutkitaan tehtävän 7 differenssijärjestelmää

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = u(k)$$

jonka alkuarvot ovat nolliä. Laske järjestelmän yksikköaskelvaste eli vaste, kun $u(k) = 1$, $k \geq 0$. Verifioi ratkaisusi oikeellisuus laskemalla suoraan yhtälöstä arvot $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$ ja vertaamalla näitä saamaasi analyttiseen ratkaisuun.

10. a. Olkoon A neliömatriisi, jonka kaikki ominaisarvot ovat nolliä. Seuraako tästä, että $A = 0$? Todista väitteesi.

b. Olkoon neliömatriiseilla A ja B yhteinen ominaisvektori x . Onko x myös matriisin $(A - 2B)$ ominaisvektori? Todista väitteesi.

Laplace-muunnoksen teoreemoja

Määritelmä: $F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$		Ajan funktio	
Laplace-muunnos			
$F(s)$		$f(t)$	T1
$C_1F_1(s) + C_2F_2(s)$		$C_1f_1(t) + C_2f_2(t)$	T2
$F(s+a)$		$e^{-at}f(t)$	T3
$e^{-as}F(s)$		$\begin{cases} 0, & t \leq a \\ f(t-a), & t > a \end{cases}$	T4
$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$		$f(at)$	T5
$-\frac{d}{ds}F(s)$		$f(t)t$	T6
$\int_s^{\infty} F(\sigma)d\sigma$		$f(t)\frac{1}{t}$	T7
$F_1(s)F_2(s)$		$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	T8
$sF(s) - f(0)$		$f'(t)$	T9
$s^2F(s) - [sf(0) + f'(0)]$		$f''(t)$	T10
$s^n F(s) - [s^{n-1}f(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)]$		$f^{(n)}(t)$	T11
$\frac{1}{s}F(s)$		$\int_0^t f(\tau)d\tau$	T12

Mikäli $f(t)$:n ja $F(s)$:n raja-arvot ovat olemassa, niin niille pätee:
 $\lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s)\} = \lim_{t \rightarrow 0} \{f(t)\}$
 $\lim_{s \rightarrow \infty} \{sF(s)\} = \lim_{t \rightarrow 0} \{f(t)\}$

Laplace-muunnos ja aikavasteita

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
1	$\delta(t)$	M1
$1/s$	1	M2
$1/s^2$	t	M3
$1/s^{n+1}$	$t^n / n!$	M4
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	M5
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	M6
$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$	M7
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	M8
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$	M9
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab(b-a)}(ae^{-bt} - be^{-at})$	M10
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin(at)$	M11
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at)$	M12
$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{-bt}\sin(at)$	M13
$\frac{s+b}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{-bt}\cos(at)$	M14
$\frac{s+a}{s+b}$	$\delta(t) + (a-b)e^{-bt}$	M15

Z-muunnosteoreemoja ja muunnospareja

$$\text{Määritelmä: } F(z) = Z\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

Z-muunnos	Diskreetin ajan funktio	
$F(z)$	$f(k)$	T1
$C_1F_1(z) + C_2F_2(z)$	$C_1f_1(k) + C_2f_2(k)$	T2
$F(az)$	$a^k f(k)$	T3
$z^{-a}F(z)$	$\begin{cases} 0, & \text{kun } k \leq a-1, \\ f(k-a), & \text{kun } k \geq a, \end{cases} \quad a > 0$	T4
$z^a F(z) - [z^a f(0) + z^{a-1} f(1) + \dots + z f(a-1)]$	$f(k+a)$	T5

Z-muunnos	Diskreetin ajan funktio	
1	$\delta_k(k) = \begin{cases} 1, & \text{kun } k = 0 \\ 0, & \text{kun } k \neq 0 \end{cases}$	M1
$\frac{z}{z-1}$	1	M2
$\frac{z}{(z-1)^2}$	k	M3
$\frac{z}{z-a}$	a^k	M4
$\frac{az}{(z-a)^2}$	ka^k	M5
$\frac{z \sin(a)}{z^2 - 2z \cos(a) + 1}$	$\sin(ak)$	M6
$\frac{z(z - \cos(a))}{z^2 - 2z \cos(a) + 1}$	$\cos(ak)$	M7
$\frac{bz \sin(a)}{z^2 - 2bz \cos(a) + b^2}$	$b^k \sin(ak)$	M8
$\frac{z(z - b \cos(a))}{z^2 - 2bz \cos(a) + b^2}$	$b^k \cos(ak)$	M9