Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.442 Matematiikan peruskurssi P2, kevät 2004 Alestalo/Koljonen

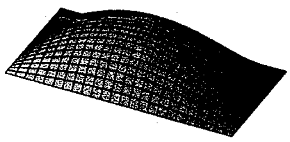
Välikoe 3. 26.4.2004 klo 16-19
Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.
Vain funktiolaskimet ovat sallittuja!

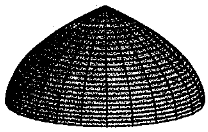
1. Määritä funktion $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y$ paikalliset ääriarvokohdat ja niiden tyypit.

2. a) Urheiluhallin katon muotoa kuvaa yhtälö

$$z = \frac{1}{32000}(1600 - x^2)(400 - y^2),$$

missä $-40 \leq x \leq 40$ ja $-20 \leq y \leq 20$ (yksikkönä metri). Määritä hallin tilavuus, kun sen pohja vastaa xy-tasoon.
b) Uuden telttamallin muotoa kuvaa sylinterikoordinaattien avulla määritelty pinta $r = 1 - z^2$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (muuttujien z ja r yksikkönä metri). Määritä teltan tilavuus, kun sen pohja vastaa tasoon $z = 0$.





3. Laske viivaintegraali

$$\int_C x\,dx - y\,dy,$$

kun C on origokeskisen 4-säteisen ympyrän kaari pisteestä $(4, 0)$ pisteeseen $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.
Huom: Grossmanin kirjan merkinnöillä laskettavana on

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}, \quad \text{missä } \mathbf{f}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}.$$

4. a) Olkoon $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ jatkuva ja

$$B(R) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}, \quad S(R) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Perustele (pallokoordinaatteja käyttämällä?) kaava

$$\frac{d}{dR} \iiint_{B(R)} f\,dV = \iint_{S(R)} f\,dS.$$

b) Laske molemmat a-kohdan integraalit pallokoordinaatteja käyttämällä tapauksessa $f(x, y, z) = 1 =$ vakio, ja tarkista, että kaava pätee.
Huom: Kohdan b) voi tietysti laskea myös ilman a-kohtaa.