T-61.3010 Digitaalinen signaalinkäsittely ja suodatus

1/6

2. välikoe / tentti. Ke 7.5.2008 klo 8-11. Sali M.

2. vk on oikeus tehdä vain kerran joko 7.5. tai 14.5. Tee välikokeessa tehtävät 1, 2 ja 7 (palaute).

Tentti on oikeus tehdä vain kerran joko 7.5. tai 14.5. Tee tentissä tehtävät 2, 3, 4, 5, 6 ja 7 (palaute). Aloita kukin tehtävä uudelta sivulta.

Tilaisuudessa saa olla oma funktiolaskin mutta ei mitään taulukkokirjaa. Tilaisuudessa jaetaan kurssin taulukkomoniste sekä palautuslomake tehtävää 1 (vk) varten.

Palautusohjeet:

- esitä opiskelijakorttisi palautuksen yhteydessä
- jos välikoe: tehtävän 1 ("rasti ruutuun") lomake omaan pinoon **"VK2-MONIVALINTA"**, täytettävä vähintään opiskelijanumero
- jos välikoe: tehtävän 2 vastauskonsepti omaan pinoon **"VK2-KONSEPTI"**, täytettävä vähintään konseptin ylälaidan tiedot
- jos tentti: kaikki vastauskonseptit sisäkkäin omaan pinoon **"TENTTI"**
- suttupaperit omaan pinoon **"SUTTU"**
- tehtäväpaperin ja taulukkomonisteen voi pitää itsellään

1) (10 x 1p, max 8 p, **VAIN VÄLIKOE**) Monivalinta. Väittämissä on 1–4 oikeaa vastausta, mutta valitse **yksi ja vain yksi.** Täytä **erillisille lomakkeelle**, joka luetaan optisesti.

Oikea valinta +1 p, väärä valinta −0.5 p, ei valintaa 0 p. Perusteluja ei tarvita. Vastaa niin moneen kuin haluat. Tehtävän maksimipistemäärä on 8 ja minimimäärä 0.

Väitteet 1.1 – 1.4 ovat kurssin jälkipuoliskon ydinainesta ja ratkaistavissa suoraviivaisesti. Väitteet 1.5 – 1.10 ovat soveltavia ja vaativat laskemista suttupaperilla.

1.1 Kausaalinen ja stabiili LTI-suodin

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.4z^{-2}}$$

on esitetty viiveiden suhteen kanonisessa (yksinkertaisessa) suoran muodon II ("direct form II") -rakenteena

(A) kuvassa 1(a)
(B) kuvassa 1(b)
(C) kuvassa 1(c)
(D) kuvassa 1(d)

1.2 Bilineaarimuunnos

(A) on bijektio (yksi-yhteen kuvaus), jossa analogisen s-tason vasen puolitaso kuvautuu z-tason yksikköympyrän sisällöksi
(B) on yksi tapa laskea analoginen FIR-suodin vastaavasta digitaalisesta vastineesta
(C) on muunnos, jolla kvantisointivirheen kohina saadaan muokattua suotimen estokaistalle
(D) on stereosignaalin suodattamista lineaarivaiheisella suotimella

1.3 Digitaalisen FIR-suotimen suunnittelussa käytettävä ikkunafunktio

$$w[n] = 0.54 + 0.46 \cdot (\cos(\frac{2\pi n}{2M}))$$

(A) on valmis FIR-suodin normalisoidulla rajakulmataajuudella $\omega_c = 2\pi \cdot M/N$, jossa N on suotimen asteluku
(B) määrää suotimen estokaistan minimivaimennukseksi $20\log_{10}(M)$ desibeliä
(C) on tyypillinen Butterworth-ikkuna, jonka pääkuvun leveys on $\Delta_{\mathrm{ML}} = 3.11\pi/M$
(D) voidaan käyttää katkaisemaan äärettömän pitkä ideaalinen impulssivaste $h_{\mathrm{ideal}}[n]$ äärellisen pitkäksi

1.4 Kun äänisignaalia $x[n]$, jonka näytteenottotaajuus on $f_T = 22050$ Hz ja pituus on noin 0.40 sekuntia ylösnäytteistetään ("upsampling") termillä $L = 2$

(A) signaalin näytemääräksi tulee noin 44100
(B) signaalin näyteväliksi tulee $T = 0.40/22050$ Hz
(C) signaalin kestoksi tulee edelleen noin 0.40 sekuntia uudella näytteenottotaajuudella $f_T' = 44100$ Hz
(D) signaalin kestoksi tulee noin 0.80 sekuntia uudella näytteenottotaajuudella $f_T' = 44100$ Hz

2/6

1.5 Tutkitaan digitaalista IIR-tyyppistä kaistanpäästösuodinta

$$H(z) = K \cdot \frac{2 - 0.108z^{-2} + 2z^{-4}}{1 + 1.16z^{-2} + 0.434z^{-4}}$$

jonka maksimiarvo on taajuudella $\omega = \pi/2$. Määrää skaalauskerroin K siten, että suotimen maksimi on 1.

(A) $K \approx 0.067$
(B) $K \approx 0.50$
(C) $K \approx 0.67$
(D) $K \approx 15$

1.6 Stabiili analogisuodin $H(s) = \Omega/(s+\Omega)$, jossa taajuusvääristymäkorjattu ("prewarped") rajataajuus $\Omega = k \cdot 0.5$, muutetaan digitaaliseksi $H(z)$ käyttäen sijoitusta $s = k \cdot (1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$. Digitaalinen suodin on

(A) $H(z) = 1/(1 + 2k^{-1}z^{-1})$
(B) $H(z) = (1/3) \cdot (1 + z^{-1})/(1 - (1/3)z^{-1})$
(C) $H(z) = (1 + z^{-1})/(1 - 3z^{-1})$
(D) $H(z) = (1 - z^{-1})/(1.5 - 0.5z^{-1})$

1.7 Tutkitaan kuvan 2(a) toisen asteen IIR-suodinta, jossa mukana kvantisointilohko Q ja siihen liittyvä kvantisointivirhettä muokkaava 1. asteen suodinlohko.

Kirjoitetaan apumuuttuja $w[n]$ ja korvataan lohko Q virhelähteellä $e[n]$ kuten kuvassa 2(b). Tästä voidaan kirjoittaa kaksi differenssiyhtälöä, toinen $y[n] = \ldots$ ja toinen $w[n] = \ldots$.

Näitä muokkaamalla saadaan suotimen ulostuloksi taajuustasossa

$$Y(z) = H_x(z) \cdot X(z) + H_e(z) \cdot E(z)$$

jossa $H_x(z)$ on varsinainen suotimen siirtofunktio ja $H_e(z)$ kvantisointivirhettä muokkaava siirtofunktio. Nämä ovat

(A) $H_x(z) = \frac{1+1.8z^{-1}+0.82z^{-2}}{1+1.8z^{-1}+0.82z^{-2}}$ ja $H_e(z) = \frac{kz^{-1}}{1+1.8z^{-1}+0.82z^{-2}}$
(B) $H_x(z) = \frac{1+1.8z^{-1}+0.82z^{-2}}{1-1.8z^{-1}+0.82z^{-2}}$ ja $H_e(z) = \frac{1+kz^{-1}}{1-1.8z^{-1}+0.82z^{-2}}$
(C) $H_x(z) = \frac{1+1.8z^{-1}+0.82z^{-2}}{1-1.8z^{-1}+0.82z^{-2}}$ ja $H_e(z) = \frac{1+(k-1.8)z^{-1}+0.82z^{-2}}{1-1.8z^{-1}+0.82z^{-2}}$
(D) Yksikään ylläolevista pareista ei ole oikein.

1.8 Jatketaan kohdasta 1.7. Oletetaan kvantisointivirhe valkoiseksi kohinaksi, jonka spektri $E(z) = 1$. Mikä on paras arvo k:lle, jotta kokonaiskohina $E_{\mathrm{TOT}}(z)$ siirtyy pois mielenkiintoiselta päästökaistalta.

(B) $k = -1$
(A) $k = 0$
(C) $k = 1$
(D) $k = 1.8$

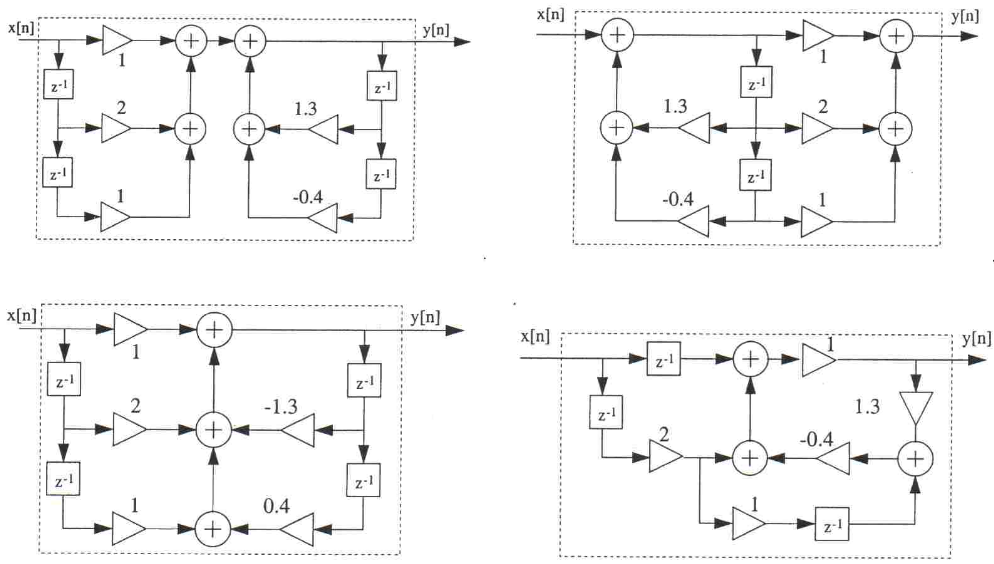
1.9 Komennolla `[B, A] = cheby2(5, 30, 0.25);` saadaan Chebychev II -tyyppinen digitaalinen suodin, jonka asteluku on $N = 5$, estokaistan minimivaimennus 30 desibeliä ja estokaistan rajataajuus $\omega_{\mathrm{stop}} = 0.25\pi$. Suotimen magnitudivasteen kuvaaja on

(A) kuvassa 3(a)
(B) kuvassa 3(b)
(C) kuvassa 3(c)
(D) kuvassa 3(d)

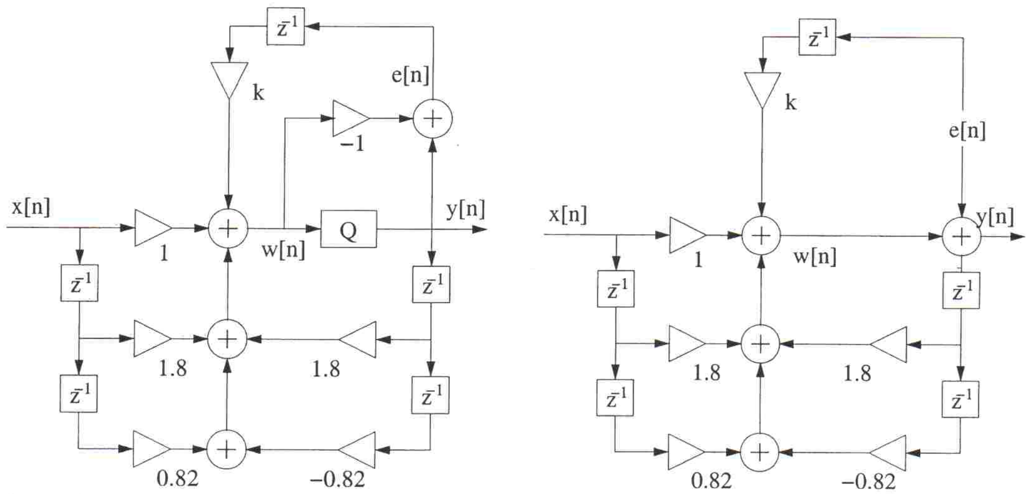
1.10 Mitä alla olevalla toimivalla Matlab-koodinpätkällä voidaan tehdä?

```
[x, fT] = wavread('mysignal.wav');
wL  = 256;
M   = length(x);
V   = zeros(ceil(M/wL), 1);
m   = 0;
for k = [1 : wL : M-wL]
   m    = m + 1;
   V(m) = sum(x(k : k+wL-1).^2);
end;
```

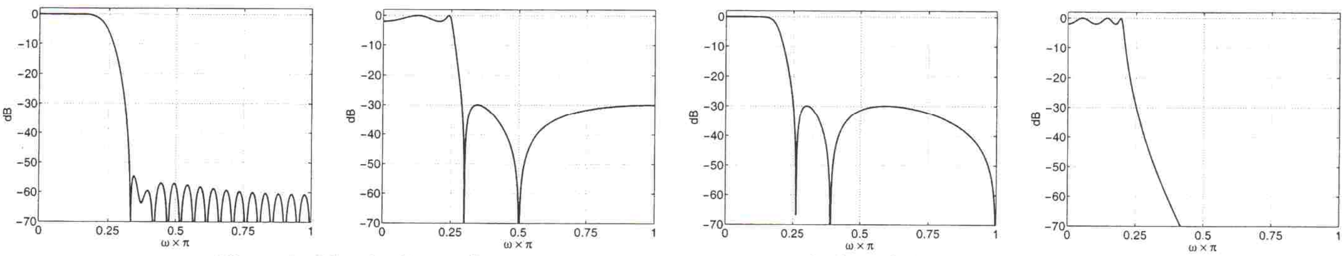
(A) Alipäästösuodatetaan signaalia rajataajuudella `wL` Hz
(B) Kynnystämällä vektorin `V` arvoja saadaan selville, missä kohtaa signaalia on hiljaisia hetkiä
(C) Lasketaan signaalin spektrin tehollisia arvoja
(D) Vektorin `V` arvoista voidaan piirtää spektrogrammi



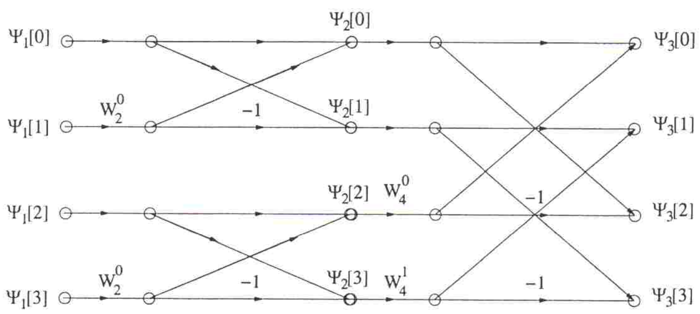
Kuva 1: Monivalintatehtävän 1.1 rakenteet, ylärivissä **(A)** ja **(B)** , alarivissä **(C)** ja **(D)** .



Kuva 2: Monivalintatehtävien 1.7 ja 1.8 2. asteen IIR-suodin 1. asteen kvantisointivirheen takaisinkytkennällä. Oikealla kvantisointilohko Q korvattu virhelähteellä $e[n]$.



Kuva 3: Monivalintatehtävän 1.9 magnitudivasteet **(A)** , **(B)** , **(C)** ja **(D)** .



Kuva 4: Tehtävä 2A. Virtauskaavio “radix-2 DIT FFT”.

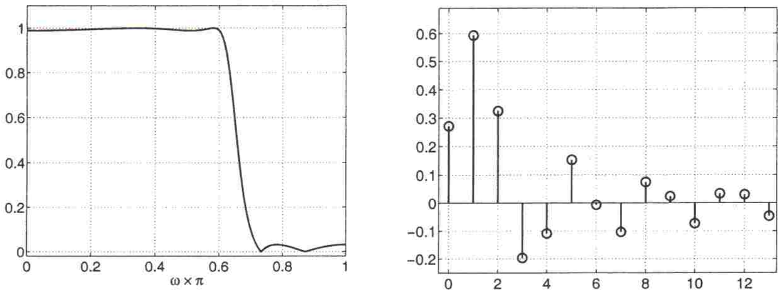
2) (6p, **VÄLIKOE JA TENTTI**) Valitse joko 2A tai 2B.

2A) FFT-algoritmit. Yleisen selostuksen lisäksi voit käyttää esimerkkinä kirjassa/kalvoissa ja laskuharjoitusmateriaalissa esiteltyä "radix-2 DIT FFT" -algoritmia, josta annettuna kuvassa 4 laskennan eteneminen neljän pisteen rakenteessa, jolloin $r = 1,\ 2$ ja $l_r = 0, \ldots, 2^{r-1} - 1$. Katso taulukosta perhosyhtälöt ja W_N. Laske välivaiheittain muunnos jonolle $x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1] - \delta[n-2] + 5\delta[n-3]$.

2B) Tutkitaan stabiilista ja kausaalista alipäästösuodinta $H(z)$, jonka päästökaista loppuu 3 kHz:ssa ja jonka näytteenottotaajuus on 10 kHz. Amplitudivaste on kuvassa 5(a) ja impulssivasteen $h[n]$ alkua kuvassa 5(b).

a) Ylösnäytteistä ("upsample") suodinta termillä $L = 3$. Hahmottele sekä uusi amplitudivaste $H^{'}(z) = H(z^3)$ että impulssivaste $h^{'}[n] = h[n/3]$ ensimmäisten kymmenen arvon ajalta.

b) Lopullinen tarkoitus on saada suotimesta alipäästösuodin samoilla rajataajuuksilla 30 kHz:n näytteeottotaajuudella. Millä toimenpiteellä tähän päästään? Hahmottele amplitudivaste $|H^{''}(e^{j\omega})|$ ja impulssivaste $h^{''}[n]$ ensimmäisten kymmenen arvon ajalta tämän toimenpiteen jälkeen.



Kuva 5: Tehtävä 2B. Vasemmalla suotimen amplitudivaste ja oikealla sitä vastaava impulssivaste.

3) (6p, **VAIN TENTTI**) Tutkitaan kahden LTI-järjestelmän sarjaankytkentää $h[n] = h_1[n] \circledast h_2[n]$, jossa $h_1[n] = \delta[n] - 0.9\delta[n-1]$ ja $h_2[n] = \delta[n] + 0.81\delta[n-2]$.

a) Mikä on koko järjestelmän impulssivaste $h[n]$?

b) Kirjoita koko suotimen siirtofunktio $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$.

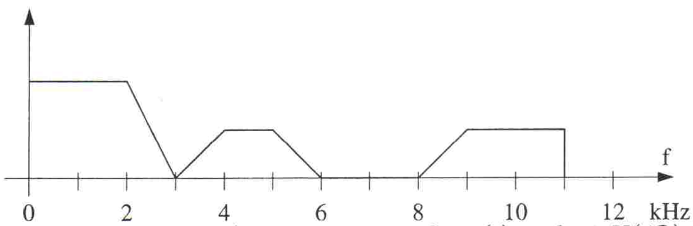
c) Hahmottele suotimen napanollakuvio. (Vinkki: voit yhdistää napanollakuviot $H_1(z)$:sta ja $H_2(z)$:sta, koska ne ovat $H(z)$:n tulon termit.)

d) Hahmottele suotimen amplitudivaste. Perustele, miksi suotimen maksimivahvistus on kohdassa $\omega = \pi$.

4) (6p, **VAIN TENTTI**) Tutkitaan analogisen signaalin $x(t)$ spektriä $X(j\Omega)$ kuvassa 6.

a) Mikä on Shannonin näytteenottoteoreeman tärkein sisältö?

b) Jos kuvan signaalia näytteistetään taajuudella $f_T = 10$ kHz, niin hahmottele näytteistetyn sekvenssin spektri $X(e^{j\omega})$.



Kuva 6: Tehtävä 4. Analogisen signaalin $x(t)$ spektri $X(j\Omega)$.

5) (6p, **VAIN TENTTI**) Stabiilin ja kausaalisen LTI-suotimen differenssiyhtälö on muotoa

$$y[n] = x[n] - 4ax[n-1] + 9a^2x[n-2] + 1.2y[n-1] - 0.72y[n-2]$$

jossa kerroin a on reaalinen luku, jonka arvo määrätään myöhemmin.

a) Piirrä suotimen lohkokaavio viiveiden suhteen kanonisena (yksinkertaisena) suora muoto II -rakenteena ("direct form II").

b) Määrää suotimen siirtofunktio $H(z)$.

c) Tutki suotimen taajuusominaisuuksia a:n funktiona napanollatarkastelulla, kun $a \geq 0$.

6) (6p, **VAIN TENTTI**) Digitaalisen IIR-suotimen suunnittelu ("filter design").

7) (1p, **VÄLIKOE JA TENTTI**) Vastaa kurssipalautteeseen ke 8.5. - ma 19.5.2008, jonne on linkki kurssin WWW-pääsivulta ja jonka URL on `http://www.cis.hut.fi/Opinnot/T-61.3010/`. Tämä kysely kuuluu osana välikoesuoritukseen ja sen arvo on +1 pistettä. Myös tenttiin osallistujat saavat +1 pistettä kyselyyn osallistumisesta.

T-61.3010 DSP Table of formulas, spring 2008

5/6

Disclaimer! Notations, e.g. ω or Ω, may vary from book to book, or from exam paper to other.

Basic math stuff

Even and odd functions:
$\mathcal{E}ven\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)]$
$\mathcal{O}dd\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)]$
Roots of second-order polynomial:
$ax^2 + bx + c = 0,\ x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$
Logarithms, decibels:
$\log\big((A \cdot B/C)^D\big) = D \cdot \big(\log A + \log B - \log C\big)$
$\log_a b = \log_c b / \log_c a$
decibels: $10\log_{10}(B/B_0)$, $20\log_{10}(A/A_0)$
$10\log_{10}(0.5) \approx -3.01$ dB, $20\log_{10}(0.5) \approx -6.02$ dB
$20\log_{10}(0.1) = -20$ dB, $20\log_{10}(0.01) = -40$ dB
Complex numbers, radii, angles, unit circle:
$i \equiv j = \sqrt{-1} = -1/j$
$z = x + jy = r\, e^{j\theta}$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\theta = \arctan(y/x) + n\pi,\ (n = 0,\ \text{if } x > 0, n = 1,\ \text{if } x < 0)$
$x = r\,\cos(\theta),\ y = r\,\sin(\theta)$
$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\,\sin(\theta)$ (*Euler's formula*)
$\cos(\theta) = (1/2) \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta}),\ \sin(\theta) = (1/2j) \cdot (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$
$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)},\ z_1/z_2 = (r_1/r_2) e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$
$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|,\ \angle(A \cdot B) = \angle A + \angle B$
$z^n = r^n e^{jn\theta} = r^n(\cos\theta + j\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + j \sin n\theta)$
$\sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{r\, e^{j\theta}} = |\sqrt[N]{r}|\, e^{j(\theta + 2\pi k)/N},\ k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$
Trigonometric functions:
$1^\circ = \pi/180$ radians ≈ 0.01745 rad, 1 rad $= 180^\circ/\pi \approx 57.30^\circ$
$\mathrm{sinc}(\theta) = \sin(\pi\theta)/(\pi\theta)$
$\sin(\theta)/\theta \to 1$, when $\theta \to 0$; $\mathrm{sinc}(\theta) \to 1$, when $\theta \to 0$
$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ (Taylor)
$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ (Taylor)

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin(\theta)$	0	0.5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.5
θ	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$-\pi/2$
$\sin(\theta)$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1
$\cos(\theta)$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	0

$\pi \approx 3.1416$, $\sqrt{3}/2 \approx 0.8660$, $\sqrt{2}/2 \approx 0.7071$
Geometric series:
$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a},\quad |a| < 1$
$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a},\quad |a| < 1$

Continuous-time unit step and unit impulse fun.:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$\delta_\Delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_\Delta(t),\quad \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$ (Dirac's delta)
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t)\,\mathrm{d}t = x(t_0)$
In DSP notation $2\pi\delta(t)$ is computed $2\pi \int \delta(t) \cdot 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$, when $t = 0$, and $= 0$ elsewhere.

Discrete-time unit impulse and unit step functions:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Periodic signals

$\exists T \in \mathbb{R} : x(t) = x(t + T), \forall t \in \mathbb{R}$
$\exists N \in \mathbb{Z} : x[n] = x[n + N], \forall n \in \mathbb{Z}$
Fundamental period T_0, N_0 is the smallest $T > 0$, $N > 0$.

Convolution

Convolution is commutative, associative and distributive.
$y(t) = h(t) \circledast x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau$
$y[n] = h[n] \circledast x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k]$
$y_C[n] = h[n] \, Ⓝ \, x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[< n - k >_N]$

Correlation:

$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] y[n - l] = x[l] \circledast y[-l]$
$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] x[n - l]$

Mean and variance of random signal:

$m_X = \mathrm{E}[X] = \int x p_X(x) dx$
$\sigma_X^2 = \int (x - m_X)^2 p_X(x) dx = \mathrm{E}[X^2] - m_X^2$

Frequencies, angular frequencies, periods:

Here f_s (also f_T later) is the sampling frequency.
Frequency f, $[f] = \mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$.
Angular frequency $\Omega = 2\pi f = 2\pi/T$, $[\Omega] = \mathrm{rad/s}$ (analog).
Normalized angular frequency $\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_s$, $[\omega] = \mathrm{rad/sample}$ (digital).
Normalized frequency in Matlab $f_{MATLAB} = 2f/f_s$, $[f_{MATLAB}] = 1/\mathrm{sample}$.

Sampling of $x_a(t)$ by sampling frequency f_T

$x_p[n] = x_a(nT) = x_a(n/f_T)$
$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_T))$

Integral transforms. Properties

Here all integral transforms share some basic properties. Examples given with CTFT, $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $x_1[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$, and $x_2[n] \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$ are time-domain signals with corresponding transform-domain spectra. a and b are constants.
Linearity. All transforms are linear.
$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$
Time-shifting. There is a kernel term in transform, e.g.,
$x[n - k] \leftrightarrow e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$
Frequency-shifting. There is a kernel term in signal e.g.,
$e^{j\omega_k n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_k)})$
Conjugate symmetry $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$. If $x[n] \in \mathbb{R}$, then $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$, $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$, $\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$. If $x[n] \in \mathbb{R}$ and even, then $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ and even. If $x[n] \in \mathbb{R}$ and odd, then $X(e^{j\omega})$ purely $\in \mathbb{C}$ and odd.
Time reversal. Transform variable is reversed, e.g.,
$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$
Differentiation. In time and frequency domain, e.g.,
$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$, $nx[n] \leftrightarrow j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} X(e^{j\omega})$
Duality. Convolution property: convolution in time domain corresponds multiplication in transform domain $x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$ and multipication property, vice versa, $x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega - \theta)})\,\mathrm{d}\theta$
Parseval's relation. Energy in signal and spectral components: $\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,\mathrm{d}\omega$

Fourier series of continuous-time periodic signals:

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\Omega_0 t}$ (synthesis)
$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\,\mathrm{d}t$ (analysis)
$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{jk\Omega_0 t_0}$
$e^{jM\Omega_0 t} x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$
$\int_T x_a(\tau) x_b(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau \leftrightarrow T a_k b_k$
$x_a(t) x_b(t) \leftrightarrow \sum_l a_l b_{k-l}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \leftrightarrow jk\Omega_0 a_k$

Continuous-time Fourier-transform (CTFT):

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\, e^{j\Omega t}\,\mathrm{d}\Omega$ (synthesis)
$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\,\mathrm{d}t$ (analysis)
$x(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k} X(j\Omega)$
$e^{j\Omega_k t} x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_k))$
$x_a(t) \circledast x_b(t) \leftrightarrow X_a(j\Omega) X_b(j\Omega)$
$x_a(t) x_b(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) \circledast X_b(j\Omega)$

$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$
$tx(t) \leftrightarrow j\frac{d}{d\Omega}X(j\Omega)$
$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$
$\sin(\Omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$
$x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$
$x(t) = \begin{cases} 1, |t| < T_1 \\ 0, |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$
$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} 1, |\Omega| < W \\ 0, |\Omega| > W \end{cases}$
$\delta(t) \leftrightarrow 1$
$\delta(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k}$
$e^{-at}\mu(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}$, where $\mathcal{R}eal\{a\} > 0$

Discrete-time Fourier-transform (DTFT):
$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$ (synthesis)
$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$, periodic with 2π (analysis)
$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_k n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_k)})$
$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$
$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta$
$nx[n] \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\sum_l \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$
$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi\sum_l[\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$
$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow j\pi\sum_l[\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)]$
$x[n] = 1 \leftrightarrow 2\pi\sum_l \delta(\omega - 2\pi l)$
$x[n] = \begin{cases} 1, |n| \le N_1 \\ 0, |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\omega(N_1+0.5))}{\sin(\omega/2)}$
$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\text{sinc}(\frac{Wn}{\pi}) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le W \\ 0, & W < |\omega| \le \pi \end{cases}$
$\delta[n] \leftrightarrow 1$
$\delta[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}$
$a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad |a| < 1$

***N*-point Discrete Fourier-transform (DFT):**
Connection to DTFT: $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$
$W_N = e^{-j2\pi/N}$
$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, \quad 0 \le n \le N-1$ (synthesis)
$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le N-1$ (analysis)
$x[< n - n_0 >_N] \leftrightarrow W_N^{-kn_0}X[k]$
$W_N^{-nk_0}x[n] \leftrightarrow X[< k - k_0 >_N]$
$y_C[n] = h[n] \textcircled{N} x[n] \leftrightarrow H[k] \cdot X[k] = Y[k]$

Laplace transform:
Convergence with a certain ROC (region of convergence).
Connection to continuous-time Fourier-transform: $s = j\Omega$
$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\, ds$ (synthesis)
$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$ (analysis)

***z*-transform:**
Convergence with a certain ROC (region of convergence).
Connection to discrete-time Fourier-transform: $z = e^{j\omega}$
$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$, C in ROC of $X(z)$ (synthesis)
$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ (analysis)
$x[n-k] \leftrightarrow z^{-k}X(z)$
$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$
$\delta[n] \leftrightarrow 1$, ROC all z
$\delta[n-k] \leftrightarrow z^{-k}$, all z, except 0 ($k > 0$) or ∞ ($k < 0$)
$\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$
$-\mu[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| < 1$
$a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$
$na^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$
$(n+1)a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$
$r^n\cos(\omega_0 n)\mu[n] \leftrightarrow \frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}, \quad |z| > |r|$
$r^n\sin(\omega_0 n)\mu[n] \leftrightarrow \frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}, \quad |z| > |r|$

LTI filter analysis
Stability $\sum_n |h[n]| < \infty$; unit cirle belongs to ROC
Causality $h[n] = 0, n < 0$; ∞ belongs to ROC
Unit step response $s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$
Causal transfer function of order $\max\{M,N\}$:
$H(z) = B(z)/A(z) = K \cdot \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} = G \cdot \frac{\prod_{m=1}^{M}(1-d_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1-p_n z^{-1})}$
Zeros d_m: $B(z) = 0$; *Poles* p_n: $A(z) = 0$
Frequency, magnitude/amplitude, phase response, $z \leftarrow e^{j\omega}$
$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|\, e^{j\angle H(e^{j\omega})}$
$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$
$H[k] = H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$
Group delay $\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega})$
Four types of linear-phase FIR filters, $h[n] = h[N-1-n]$ (even/odd symmetric), or $h[n] = -h[N-1-n]$ (e/o antis.).
Zeros symmetric w.r.t. unit circle: $r\, e^{\pm j\theta}$ and $(1/r)\, e^{\mp j\theta}$.
Important *transform pairs and properties*:
$a\,\delta[n-k] \leftrightarrow a\, e^{-jk\omega} \leftrightarrow a\, z^{-k}$
$a^n\mu[n] \leftrightarrow 1/[1 - a\, e^{-j\omega}] \leftrightarrow 1/[1 - a\, z^{-1}]$
$h[n] = \sum_i(k_i \cdot a_i^n\mu[n]) \leftrightarrow H(e^{j\omega}) = \ldots$
$\ldots\sum_i(k_i/[1 - a_i\, e^{-j\omega}]) \leftrightarrow H(z) = \sum_i(k_i/[1 - a_i\, z^{-1}])$
$a\, x[n-k] \leftrightarrow a\, e^{-jk\omega}X(e^{j\omega}) \leftrightarrow a\, z^{-k}X(z)$
$y[n] = h[n] \circledast x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$
rectangular $\leftrightarrow$ sinc, sinc $\leftrightarrow$ rectangular

LTI filter design (synthesis)
Bilinear transform $H(z) = H(s)|_s$ and *prewarping*
$s = k \cdot (1 - z^{-1})/(1 + z^{-1}), \quad k = 1$ or $k = 2/T = 2f_T$
$\Omega_{prewarp,c} = k \cdot \tan(\omega_c/2), \quad k = 1$ or $k = 2/T = 2f_T$
Spectral transformations, $\hat{\omega}_c$ desired cut-off
LP-LP $z^{-1} = (\hat{z}^{-1} - \alpha)/(1 - \alpha\hat{z}^{-1})$, where
$\alpha = \sin(0.5(\omega_c - \hat{\omega}_c))/\sin(0.5(\omega_c + \hat{\omega}_c))$
LP-HP $z^{-1} = -(\hat{z}^{-1} + \alpha)/(1 + \alpha\hat{z}^{-1})$, where
$\alpha = -\cos(0.5(\omega_c + \hat{\omega}_c))/\cos(0.5(\omega_c - \hat{\omega}_c))$
Windowed Fourier series method
$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \ge \omega_c \end{cases} \leftrightarrow h[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}(\frac{\omega_c n}{\pi})$
$h_{FIR}[n] = h_{ideal}[n] \cdot w[n]$
$H_{FIR}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{ideal}(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta$
Fixed window functions, order $N = 2M$, $-M \le n \le M$:
Rectangular $w[n] = 1$
Hamming $w[n] = 0.54 + 0.46\cos((2\pi n)/(2M))$
Hann $w[n] = 0.5 \cdot (1 + \cos((2\pi n)/(2M)))$
Blackman $w[n] = 0.42 + 0.5\cos(\frac{2\pi n}{2M}) + 0.08\cos(\frac{4\pi n}{2M})$
Bartlett $w[n] = 1 - (|n|/M)$

Implementation
Radix-2 DIT FFT butterfly equations
$\begin{cases} \Psi_{r+1}[\alpha] &= \Psi_r[\alpha] + W_N^l\Psi_r[\beta] \\ \Psi_{r+1}[\beta] &= \Psi_r[\alpha] - W_N^l\Psi_r[\beta] \end{cases}$

Multirate systems
Upsampling (interpolation) with factor L, $\boxed{\uparrow L}$
$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ x_u[n] = 0, \text{ otherwise} \end{cases}$
$X_u(z) = X(z^L)$, $X_u(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$
Downsampling (decimation) with factor M, $\boxed{\downarrow M}$
$x_d[n] = x[nM]$
$X_d(z) = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M}W_M^{-k})$,
$X_d(e^{j\omega}) = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega-2\pi k)/M})$