Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Pitkäranta/Hermelin

Mat-1.402 Peruskurssi L2

Välikoe 1 21.2.2005

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

1. Laske seuraavien määrättyjen integraalien arvot:

$$\text{a)} \int_0^\pi \sin^3 x\,dx \quad \text{b)} \int_1^\infty \frac{1}{x^2-x+1}\,dx \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$$

2. Näytä integraaliin vertaamalla, että suurilla $n \in \mathbb{N}$ pätee eräillä $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{\ln k}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n}}(a\ln n + b) + \mathcal{O}(n^{-3/2}\ln n)$$

Mitkä ovat vakioiden a, b arvot?

3. Piste $P = (x, y)$, missä $x > 0$, on käyrällä $y = y(x)$, ja käyrän tangentti pisteessä P leikkaa y-akselin pisteessä Q. Määritä käyrän yhtälö, kun tiedetään, että piste (1,1) on käyrällä ja että P:stä riippumatta kolmion OPQ (O = origo) pinta-ala = 1. Huom: Kaksi ratkaisua!

4. Etsi seuraaville differentiaaliyhtälöille ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(1) = y'(1) = 1$.
a) $4(y')^2y'' = y$ b) $4x^2y'' = y$

Svensk text

1. Beräkna värdet av följande bestämda integraler.

$$\text{a)} \int_0^\pi \sin^3 x\,dx \quad \text{b)} \int_1^\infty \frac{1}{x^2-x+1}\,dx \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$$

2. Visa genom att jämföra med en integral, att för stora $n \in \mathbb{N}$ gäller det för vissa $a, b \in \mathbb{R}$ att

$$\sum_{k=n}^\infty \frac{\ln k}{k\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n}}(a\ln n + b) + \mathcal{O}(n^{-3/2}\ln n)$$

Vilka värden har konstanterna a och b?

3. Punkten $P = (x, y)$, där $x > 0$, finns på kurvan $y = y(x)$, och kurvans tangent i punkten P skär y-axeln i punkten Q. Bestäm kurvans ekvation, om man vet att punkten (1,1) finns på kurvan och att triangeln OPQ (där O = origo) har arean = 1 oberoende av P. Märke: Två lösningar!

4. Bestäm lösningen till följande differentialekvationer, som satisfierar begymmelsevillkoren $y(1) = y'(1) = 1$.

a) $4(y')^2y'' = y$ b) $4x^2y'' = y$