Institutionen för matematik
Tekniska högskolan
Pitkäranta/Hermelin

Mat-1.402 Peruskurssi L2

Välikoe 2 21.3.2005

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

1. Lös ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T \in \mathbb{R}^3$ (allmänt $\mathbf{b}$) och

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

med hjälp av Gauss' algoritm. Via algoritmen framgår också inversmatrisen $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ och $\mathbf{A}$:s LU-faktorisering $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Vilka är dessa matriser (alltså $\mathbf{B}, \mathbf{L}$ och $\mathbf{U}$)?

2. Den affina avbildningen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projecerar punkten (x, y) på linjen $S : x + 2y + 1 = 0$ i linjens $S_1 : 2x + y = 0$ riktning. Bestäm $\mathbf{f}$ på grundformen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = [x, y]^T$.

3. Ett flygplan stiger från en flygplats i origo längs rymdkurvan

$$S: \quad y = x^2/2 \quad \& \quad z = x/2, \quad x \geq 0.$$

Lufttemperaturen längs denna rymdkurvan är

$$T(x, y, z) = -10(2 - 2z + z^2) + (2x^2 + 3y)/(1 + z^2),$$

där enheterna är °C (T) och km (x, y, z). Utetemperaturen mäts också från flygplanet - låt mätresultatet vara $T(t)$ vid tidpunkten t (min). I ett visst ögonblick är planet i punkten $P = (1, 1/2, 1/2)$ och dess fart är 8 km/min. Hur stor är den uppmätta utetemperaturens $T(t)$ momentära ändringshastighet $T'(t)$ i detta ögonblick? Ge svaret med enheterna °C/min.

4. Vi undersöker funktionen $f(x, y, z) = xy - z^2$ på rymdkurvan

$$S : \begin{cases} x^2 + y^4 & = 8 - y^2 z^2 \\ x & = 1 - yz \end{cases}$$

a) Ge iterationsschemet för Newtons metod för att finna f:s nollställen på kurvan S (inversmatrisen behöver inte beräknas). b) Härled med hjälp av metoden med Lagrange multiplikatorer det ickelinjära ekvationssystemet, vars lösningar ger f:s minimi- och maximipunkter på kurvan S.

Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Pitkäranta/Hermelin

Mat-1.402 Peruskurssi L2

Välikoe 2 21.3.2005

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

1. Ratkaise Gaussin algoritmilla yhtälöryhmä $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kun $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T \in \mathbb{R}^3$ (yleinen $\mathbf{b}$) ja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

?

Algoritmi paljastaa myös käänteismatriisin $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ sekä $\mathbf{A}$:n LU-hajotelman $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Mitä nämä matriisit (siis $\mathbf{B}, \mathbf{L}$ ja $\mathbf{U}$) ovat?

2. Affiniikuvaus $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projisoi pisteen (x, y) suoralle $S : x + 2y + 1 = 0$ suoran $S_1 : 2x + y = 0$ suunnassa. Määritä $\mathbf{f}$ perusmuodossa $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = [x, y]^T$. ?

3. Lentokone nousee origossa olevalta kentältä pitkin avaruuskäyrää

$$S: \quad y = x^2/2 \quad \& \quad z = x/2, \quad x \geq 0.$$

Ilman lämpötila tarkasteltavassa nousukäyrän pisteessä on

$$T(x, y, z) = -10(2 - 2z + z^2) + (2x^2 + 3y)/(1 + z^2),$$

missä yksiköt ovat °C (T) ja km (x, y, z). Ulkoilman lämpötilaa mitataan myös koneessa - olkoon mittaustulos $T(t)$ hetkellä t (min). Eräällä ajanhetkellä kone on pisteessä $P = (1, 1/2, 1/2)$ ja sen vauhti on 8 km/min. Mikä on kyseisellä hetkellä mittarilukemasta $T(t)$ laskettu ulkolämpötilan hetkellinen muuttumisnopeus $T'(t)$? Anna tulos yksikkönä °C/min.

4. Tarkastellaan funktiota $f(x, y, z) = xy - z^2$ avaruuskäyrällä

$$S : \begin{cases} x^2 + y^4 & = 8 - y^2 z^2 \\ x & = 1 - yz \end{cases}$$

a) Esitä Newtonin menetelmään perustuva iteraatiokaava f:n nollakohtien etsimiseksi käyrältä S (käänteismatriisia ei tarvitse laskea). b) Johda Lagrangen kertojien menetelmällä epälineaarinen yhtälöryhmä, jonka ratkaisuina saadaan f:n minimi- ja maksimikohdat käyrällä S.