Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Pitkäranta/Hermelin

Mat-1.402 Peruskurssi L2

Välikoe 3 25.4.2005

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

1. Määritä ortonormeerattu koordinaatisto $\{O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$, jossa toisen asteen pinnan $S : 5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 4yz - 4 = 0$ yhtälö saa muodon $a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + d = 0$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Laske a, b, c ja d ja luokittele pinta.

2. Laske tasointegraali
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{[1 + (x - 2y)^2 + (2x + 3y)^2]^2}\, dxdy.$$

3. R-säteisen kuulan massatiheys on $\rho = \rho_0(r/R)^\alpha$, missä r on etäisyys kuulan keskipisteestä O, ρ_0 on vakio ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Kuulan hitausmomentti pisteen O kautta kulkevan suoran suhteen on $I = \frac{1}{2}mR^2$, missä m =kuulan massa. Mikä on α:n arvo?

4. Olkoon A tetraedri, jonka kärkipisteet ovat $O = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ ja $P_3 = (0, 0, 1)$ ja olkoon
$$\begin{aligned} \vec{F} &= (xy^2 + e^{-yz})\vec{i} + (y^3 + e^{xz})\vec{j} + 2y^2z\vec{k} \\ \vec{G} &= (y - z)\vec{i} + (z - 2x)\vec{j} + (x - 3y)\vec{k} + (x + 2y + 3z)^{-1}(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \end{aligned}$$
Laske a) kentän $\vec{F}$ vuo A:n reunapinnan ∂A läpi, b) $\int_p \vec{G} \cdot d\vec{r}$, missä $p = P_1P_2P_3P_1$ (suljettu murtoviiva).

Svensk text

1. Bestäm det ortonormerade koordinatsystemet $\{O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$, i vilket andragradsytans S : $5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 4yz - 4 = 0$ ekvation får formen $a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + d = 0$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Beräkna a, b, c och d och klassificera ytan.

2. Beräkna ytintegralen
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{[1 + (x - 2y)^2 + (2x + 3y)^2]^2}\, dxdy.$$

3. Densiteten hos en kula med radien R är $\rho = \rho_0(r/R)^\alpha$, där r är avståndet från kulans mittpunkt O, ρ_0 är en konstant och $\alpha \in \mathbb{R}$. Kulans tröghetsmoment med avseende på en linje genom punkten O är $I = \frac{1}{2}mR^2$, där m =kulans massa. Vad har α för värde?

4. Låt A vara en tetraeder, vars hörnpunkter är $O = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ och $P_3 = (0, 0, 1)$ och låt
$$\begin{aligned} \vec{F} &= (xy^2 + e^{-yz})\vec{i} + (y^3 + e^{xz})\vec{j} + 2y^2z\vec{k} \\ \vec{G} &= (y - z)\vec{i} + (z - 2x)\vec{j} + (x - 3y)\vec{k} + (x + 2y + 3z)^{-1}(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \end{aligned}$$
Beräkna a) fältet $\vec{F}$:s flöde genom A:s randyta ∂A, b) $\int_p \vec{G} \cdot d\vec{r}$, där $p = P_1P_2P_3P_1$ (en sluten bruten linje).