

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L 3

1. välikoe 17. 10. 2005

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Laskimet ovat kiellettyjä.

1. Tarkastellaan funktiota

$$f : z = x + iy \mapsto e^y(\cos x - i \sin x).$$

(a) Onko f jossain kompleksitason alueessa analyyttinen?

(b) Määrää joukon $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi\}$ kuvajoukko kuvauksessa f .

2. Määrää kompleksilukujen $z_1 = i^{\frac{1}{2}}$ ja $z_2 = i^2$ kaikki logaritmit $\log z_1, \log z_2$. Olkoon $z_3 = i$. Ovatko pistejoukot

(a) $\log z_1$ ja $\frac{1}{2} \log z_3$

(b) $\log z_2$ ja $2 \log z_3$

samat?

3. Määrää joukon

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \geq 1 \text{ ja } |2z + 3| \geq 3\}$$

kuvajoukko kuvauksessa

$$f : f(z) = \frac{z + 1}{z - 2}.$$

4. Olkoot γ yksikköympyrän $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ kerran positiiviseen kiertosuuntaan parametrisoiva polku ja Γ ympyrän $\{z \in \mathbb{C} \mid |2z - i| = 1\}$ kerran negatiiviseen kiertosuuntaan parametrisoiva polku. Määrää integraalit

(a)

$$\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{2z + i} dz,$$

$$\oint_{\gamma} = 2\pi i \sum \operatorname{Res}$$

(b)

$$\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{(2z + i)^2} dz,$$

(c)

$$\oint_{\Gamma} \sin \left(\frac{1}{2z + i} \right) dz.$$