Mat-1.404 Matematiikan peruskurssi L4 **Eirola, Lassas, Lukkari**
Välikoe 2 27.3.2006

Muista täyttää henkilötietosi *jokaiseen* vastauspaperiin. Merkitse myös koulutusohjelma. Laskimen käyttö ei ole sallittu. Välikoe kestää kolme tuntia.

1. Osoita Fourier-muunnosta käyttämällä, että lämpöyhtälön

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,, & x \in \mathbb{R},\quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

ratkaisu on $v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{(x-y)2}{4t})\, f(y)\, dy$.

2. Etsi muodollinen (sarjamuotoinen) ratkaisu lämpöyhtälölle

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\,, & x \in (0,1)\,,\ y \in (0,1)\,,\ t > 0\,, \\ u_x(0,y,t) = u_x(1,y,t) = 0\,, \\ u_y(x,0,t) = u_y(x,1,t) = 0\,, \\ u(x,y,0) = f(x,y). \end{cases}$$

Huomaa, että reunalla on annettu Neumann-reunaehto ts. normaaliderivaatat häviävät.

3. Tarkastellaan modifioitua aaltoyhtälöä (joka on tunnettu plasma-aaltoyhtälönä)

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2\, u_{xx}(x,t) + A\, u(x,t)\,, & x \in (0,L)\,,\ t > 0\,, \\ u(0,t) = 0\,,\ u(L,t) = 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,,\ u_t(x,0) = g(x)\,. \end{cases}$$

missä $c > 0$ ja $A \in \mathbb{R}$. Määritellään

$$E(t) = \tfrac{1}{2} \int_0^L (\, u_t(x,t)^2 + c^2\, u_x(x,t)^2 - A\, u(x,t)^2\,)\, dx\,.$$

Osoita, että $E(t)$ on vakio, eli

$$E(t) = E(0), \quad t > 0.$$

4. Olkoon $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| < a\}$. Etsi tehtävälle

$$\begin{cases} u_{tt}(\boldsymbol{x},t) = c^2\, \Delta u(\boldsymbol{x},t)\,, & \boldsymbol{x} \in \Omega\,,\ t > 0\,, \\ u(\boldsymbol{x},t) = 0\,, \quad \text{kun } |\boldsymbol{x}| = a\,, \\ u(\boldsymbol{x},0) = f(|\boldsymbol{x}|)\,,\ u_t(x,0) = 0\,, \end{cases}$$

sarjamuotoinen ratkaisu.

Kaavoja paperin kääntöpuolella ⟶

Divergenssilause:
$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$$

Green 1:
$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v\,\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Green 2:
$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu} - u\, \tfrac{\partial v}{\partial \nu})\, d\sigma\,.$$

Green 3:
$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:
$$f(x) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \cos\Big(\tfrac{k\pi x}{L}\Big) + b_k \sin\Big(\tfrac{k\pi x}{L}\Big) \Big]\,,$$
$$a_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\Big(\tfrac{k\pi x}{L}\Big)\, dx\,, \quad b_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\Big(\tfrac{k\pi x}{L}\Big)\, dx\,.$$

Fourier-muunnos:
$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx\,.$$

Fourier-käänteismuunnos:
$$f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, \widehat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Hyödyllinen kaava:
$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega y - \beta\omega^2}\, d\omega = \sqrt{\tfrac{\pi}{\beta}}\, e^{-y^2/4\beta}\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,,\ \beta > 0\,.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:
$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:
$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\phi}\, u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2}\, u_\phi\,.$$

Besselin funktio J_m toteuttaa:
$$r^2 J_m''(r) + r J_m'(r) + (r^2 - m^2) J_m(r) = 0\,.$$

D'Alembertin kaava:
$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\, [\, f(x+ct) + f(x-ct)\,] + \tfrac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds\,.$$

Kirchhoffin kaava kahdessa dimensiossa:
$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\boldsymbol{v}|\le 1} \frac{\tfrac{\partial}{\partial t}\,(t\, f(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{v}|^2}}\, d\boldsymbol{v}\,.$$

Kirchhoffin kaava kolmessa dimensiossa:
$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\boldsymbol{v}|=1} \big[\, \tfrac{\partial}{\partial t}\, \big(\, t\, f(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})\,\big) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v}) \big]\, d\sigma_{\boldsymbol{v}}\,.$$