TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Systeemianalyysin laboratorio

Mat-2.139 Optimointioppi Kimmo Berg *Välikoe, 1.11.2006*

1. Määrittele seuraavat käsitteet:

   a) konveksi joukko $S \subseteq \Re^n$,

   b) funktion $f : S \mapsto \Re$ epigraafi,

   c) edellisten avulla konveksi funktio $g : S \mapsto \Re$,

   d) affiini funktio $a : \Re^n \mapsto \Re^m$,

   e) $\Re^n$:n hypertaso, ja

   f) konveksi neliöllinen funktio $q : \Re^n \mapsto \Re$.

2. Osoita Farkasin lauseen: toisella seuraavista systeemeistä on ratkaisu

$$\begin{array}{lll} 1. & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0},\ \mathbf{c}'\mathbf{x} > 0 & \text{jollakin } \mathbf{x} \in \Re^n \\ 2. & \mathbf{A}'\mathbf{y} = \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} & \text{jollakin } \mathbf{y} \in \Re^m, \end{array}$$

   avulla Motzkinin lause: toisella seuraavista systeemeistä on ratkaisu

$$\begin{array}{lll} 1. & \mathbf{A_1x} < \mathbf{0},\ \mathbf{A_2x} = \mathbf{0} & \text{jollakin } \mathbf{x} \in \Re^n \\ 2. & \mathbf{A_1'y_1} + \mathbf{A_2'y_2} = \mathbf{0},\ \mathbf{y_1} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{y_1} \neq \mathbf{0} & \text{joillakin } \mathbf{y_1} \in \Re^m, \mathbf{y_2} \in \Re^l, \end{array}$$

   missä $A \in \Re^{m \times n}$, $c \in \Re^n$, $A_1 \in \Re^{m \times n}$ ja $A_2 \in \Re^{l \times n}$.

3. Tutkitaan seuraavaa optimointitehtävää

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 + 89 \\ s.e. & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

   a) Osoita että tehtävällä on ratkaisu.

   b) Osoita että kyseessä on konveksi neliöllinen optimointitehtävä.

   c) Osoita että konveksin optimointitehtävän lokaalit minimit ovat globaaleja.

   d) Kirjoita aligradienttien (määrittele!) avulla välttämätön ja riittävä optimaalisuusehto. Tutki toteuttaako piste $(1, 3)$ ehdon. $\xi^T(x - \bar{x}) \geq 0$

   e) Osoita että tehtävän ratkaisu on yksikäsitteinen.

KÄÄNNÄ!

4. a) Kirjoita epäyhtälörajoitetun tehtävän välttämättömät KKT-ehdot.

b) Tutki toteuttaako piste $(1,0)$ tehtävän

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 \\ s.e. & (x_1-1)^2+(x_2-1)^2 \leq 1 \\ & (x_1-1)^2+(x_2+1)^2 \leq 1 \end{array}$$

KKT-ehdot. Mitä tästä voidaan päätellä?

5. a) Osoita, että hyötyfunktio $u_\alpha(x) = (x^\alpha - 1)/\alpha$ on monotonisesti kasvava ja konkaavi, kun $dom\, u_\alpha = \Re_+$ ja $0 < \alpha \leq 1$.

b) Mikä on alidifferentiaali $\partial f(x)$, kun $f : \Re \mapsto (-\infty, +\infty]$ on määritelty

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jos } x \in [-1,1] \\ \mid x \mid -1 & \text{jos } x \in [-2,-1) \cup (1,2] \\ +\infty & \text{jos } x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty). \end{cases}$$