

1. Määrittele käsitteet

- a) Lagrangen duaalifunktio,
- b) täydennetty Lagrangen sakkofunktio,
- c) konvergenssikerroin,
- d)  $H$ -konjugaattisuunnat ja selitä
- e) heikko duaalisuus ja
- f) Maratos-efekti.

2. a) Perustele minkä takia konjugaattigradienttimenetelmä on parempi kuin Newtonin menetelmä.
- b) Perustele minkä takia kvasi-Newton menetelmät ovat parempia kuin gradienttimenetelmä.
- c) Kuinka monta funktioevaluointia (alkiota) per iteraatio tarvitaan Newtonin menetelmässä 1000 muuttujan tehtävälle (gradientti ja Hessen matriisi tarkasti saatavilla).

3. a) Mitä tarkoitetaan keskuspolulla sisäpistemethoden yhteydessä?
- b) Muunna tehtävä

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{s.e.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

logaritmiseksi estefunktioitehtäväksi. Kirjoita estefunktioitehtävän KKT-ehdot ja sisäpistemethoden Newton-päivitysyhtälöt. Voit olettaa että aloituspiste on käypä. Ratkaise hakusuunnat eksplisiittisesti yhtälöistä.

4. a) Olkoon  $A$  symmetrinen  $n \times n$  matriisi. Olkoon  $v$   $A$ :n ominaisvektori ja vastaava ominaisarvo  $\lambda$ . Näytä että  $v$  on  $A^2$ :n ominaisvektori. Mikä on tätä vastaava ominaisarvo?
- b) Tutkitaan rajoittamattoman tehtävän minimointia gradienttimenetelmällä. Oletetaan että kohdefunktio  $f(x)$  on aidosti konvekksi ja neliöllinen. Vertaillaan  $f(x)$ :n ja  $F(x) = \frac{1}{2}\|\nabla f(x)\|^2$ :n minimointia. Vertaa konvergenssinopeutta kahdelle menetelmälle tutkimalla konditiolukua  $\kappa = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ . Onko  $F$ :n minimointi kannattavaa?

5. Ratkaise tehtävä

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 - xy + y^2 - 3x \\ \text{s.e.} \quad & x \geq 0, y \geq 0 \\ & x + y \leq 4 \end{aligned}$$

aktiivisen joukon menetelmällä alkaen pisteestä  $x = y = 0$ . Perustele kukin työvaihe.