Tentti 8.5.2007

Kirjoita koepapereihin selvästi

- Mat–2.148 Dynaaminen optimointi, tentti 8.5.2007
- opintokirjan n:ro, TEKSTATEN sukunimi, viralliset etunimet (puhuttelunimi alleviivaten)
- koulutusohjelma (ei osasto), vuosikurssi
- nimikirjoitus

1. Määrittele lyhyesti, mutta täsmällisesti (formuloi)

   a) Ohjattavuus

   b) Optimaalisuusperiaate

   c) Singulaariväli

   d) Lokaali tasapainoanalyysi

   e) Minimiponnistustehtävä

   f) Kollokaatiomenetelmä

2. Ratkaise Hamilton-Jacobi-Bellmanin yhtälön avulla optimaalinen ohjaus tehtävälle

$$\min J = \frac{1}{2}x^2(0.04) + \int_0^{0.04}\left[\frac{1}{4}x^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)\right]dt$$
$$\dot{x}(t) = -10x(t) + u(t).$$

   Vihje: kokeile muotoa $J\left(x(t),t\right) = \frac{1}{2}K(t)x^2(t)$ olevaa yritettä.

3. Etsi ekstremaalit funktionaaleille

   a) $J(x) = \int_0^2 \left[x^2(t) + 2\dot{x}(t)x(t) + \dot{x}^2(t)\right]dt;\ x(0) = 1,\ x(2) = -3.$

   b) $J(x) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + x(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t)\right]dt;\ x(0) = \frac{1}{2},\ x(1)$ vapaa.

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} - p^*\right]\delta x_f + \left[\mathcal{H} + \frac{\partial h}{\partial t}\right]\delta t_f = 0$$

$$[g_{\dot{x}}]\,\delta x_f + [g - g_{\dot{x}}\dot{x}]\,\delta t_f = 0$$

4. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{aligned}\min J &= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[2x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\right] \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + \left[1 - x_1^2(t)\right] x_2(t) + u(t),\end{aligned}$$

missä alku- ja lopputila on annettu.

a) Määritä liittotilayhtälöt.

b) Määritä Hamiltonin funktion minimoiva ohjaus, kun

i) $u(t)$ on rajoittamaton.

ii) $|u(t)| \leq 1$.

5. Tarkastellaan optimisäätötehtävää

$$\begin{aligned}\min J &= h(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t))dt \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) \text{ vapaa.}\end{aligned}$$

Osoita, että suorien menetelmien antama ratkaisu toteuttaa approksimatiivisesti optimisäätötehtävän ratkaisun välttämättömät optimaalisuusehdot.

Toisin sanoen muodosta optimisäätötehtävää approksimoiva epälineaarinen optimointitehtävä diskretoimalla yllä esitetty tehtävä ajassa ja johda diskretoidun tehtävän välttämättömät optimaalisuusehdot. Vertaa johtamiasi ehtoja optimisäätötehtävän välttämättömiin optimaalisuusehtoihin ja pohdi, mitä diskretoinnin tihentämisestä seuraa.