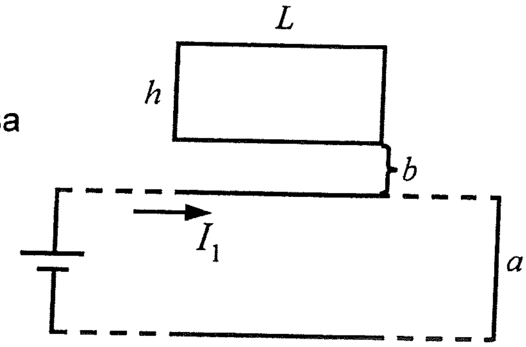
Tfy-0.1024 Fysiikka IIB — Tentti 13.5.2009

Merkitse jokaiseen vastauspaperiin nimi, opiskelijanumero, laitos ja kurssin koodi.
Mainitse myös suorititko laskuharjoituksia keväällä 2009.

1. Vastaa lyhyesti ja selkeästi seuraaviin kysymyksiin.
a) Selosta vaihtovirtageneraattorin toimintaperiaate. (1p)
b) Kuvaa sanallisesti ja kuvien avulla millainen on oskilloivan sähköisen dipolin säteilemä sähkömagneettinen kenttä kaukana dipolista. (1p)
c) Kirjoita Faradayn laki integraalimuodossa ja osoita, että se sisältää Lenzin lain. (1p)
d) Mikä on aaltopaketti ja miten se liittyy hiukkaseen? (1p)
e) Mikä on de-Broglien hypoteesi? (1p)
f) Mistä kvanttimekaanisen systeemin energian (ja muiden suureiden) kvantittuminen on seurausta? (1p)

2. Laske keskinäisinduktanssi kahdelle suorakaiteen muotoiselle virtapiirille (ks. kuva). Piirit ovat samassa tasossa tyhjiössä ja alemman piirin leveys on paljon suurempi kuin ylemmän piirin leveys. (6p)



3. Maxwellin yhtälöt
a) Kirjoita Maxwellin yhtälöt differentiaalimuodossa ja nimeä esiintyvät suureet. (2p)
b) Miten Maxwellin yhtälöt muuttuisivat, jos magneettisia monopoleja löydettäisiin? (1p)
c) Johda Maxwellin yhtälöistä lähtien aaltoyhtälö sähkökentälle tyhjiössä. Kuvaa selvästi kaikki oletukset jotka johdossa teet. (3p)

4. Sähkömagneettinen harmoninen tasoaalto (kulmataajuus ω) etenee positiivisen z-akselin suuntaan ja osuu kohtisuorasti kahden aineen rajapinnalle. Tulevan aallon energiasta osa ρ heijastuu takaisin. Lisäksi aalto kokee heijastuksessa π:n suuruisen vaihesiirron.
a) Kirjoita tulevan ja heijastuneen aallon sähkökentän lauseke. (3p)
b) Määritä kokonaiskentän energiatiheyden aikakeskiarvo. Millä etäisyyksillä rajapinnasta ko. aikakeskiarvo on suurimmillaan ja pienimmillään? Määritä nämä minimi- ja maksimiarvot. (3p)

5. Yksiulotteisessa, äärettömän syvässä, potentiaalikuopassa välillä (0, a) hiukkasen perustilan aaltofunktio on

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-iE_0 t/\hbar}$$

a) Määritä paikan ja paikan neliön odotusarvot. (2p)
b) Määritä liikemäärän ja liikemäärän neliön odotusarvot. (2p)
c) Osoita, että paikka ja liikemäärä noudattavat Heisenbergin epätarkkuusperiaatetta. (2p)

KÄÄNNÄ

Vakioiden arvoja

Planckin vakio	$h = 6.6261 \cdot 10^{-34}$ Js
h/2π	$\hbar = 1.0546 \cdot 10^{-34}$ Js
valon nopeus tyhjiössä	$c = 2.9979 \cdot 10^{8}$ m/s
alkeisvaraus	$e = 1.6022 \cdot 10^{-19}$ C
tyhjiön permeabiliteetti	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2
tyhjiön permittiivisyys	$\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$ F/m
Boltzmannin vakio	$k = 1.3807 \cdot 10^{-23}$ J/K
elektronin lepomassa	$m_e = 9.1094 \cdot 10^{-31}$ kg
protonin lepomassa	$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27}$ kg
neutronin lepomassa	$m_n = 1.6749 \cdot 10^{-27}$ kg
Stefan-Boltzmannin vakio	$\sigma = 5.6705 \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4)

Nabla sylinterikoordinaateissa

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\varphi}}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Nabla pallokoordinaateissa

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{r} + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

Integraaleja

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \sin^3 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax$$

$$\int \cos^3 ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax$$

$$\int x \sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$

$$\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$

$$\int x^2 \sin ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2\cos ax + 2ax\sin ax - a^2x^2\cos ax)$$

$$\int x^2 \cos ax\, dx = \frac{1}{a^3}(-2\sin ax + 2ax\cos ax + a^2x^2\sin ax)$$

$$\int x^n \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}x^n\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$$

$$\int x^n \cos ax\, dx = \frac{1}{a}x^n\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\, dx$$

$$\int x\sin^2 ax\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int x\cos^2 ax\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int x^2\sin^2(ax)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x\cos(2ax)}{4a^2} - \frac{(-1+2a^2x^2)\sin(2ax)}{8a^3}$$

Vektorilaskentaa

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \begin{vmatrix} \vec{A} \cdot \vec{C} & \vec{A} \cdot \vec{D} \\ \vec{B} \cdot \vec{C} & \vec{B} \cdot \vec{D} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}(\psi\xi) = \xi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\xi$$

$$\vec{\nabla} \times (\psi\vec{A}) = \vec{\nabla}\psi \times \vec{A} + \psi\,\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi\vec{A}) = \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{A} + \psi\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

Trigonometeriaa

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

   $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha \qquad \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$

2. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

   $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

   $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} \qquad \cot(\alpha-\beta) = -\dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\alpha - \cot\beta}$

3. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

   $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

4. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

   $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

   $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

5. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

   $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

   $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

   $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \qquad \cot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$