

Hakola, Kurki-Suonio

Kurssin voi suorittaa vaihtoehdon A tai B mukaisesti.

Vaihtoehto A: vastaan **jokaiseen** tehtävään; kurssiarvosananani määräytyy tämän tentin perusteella eikä laskuharjoituspisteitä oteta huomioon.

Vaihtoehto B: vastaan valintani mukaan korkeintaan **neljään** tehtävään; kurssiarvosananani määräytyy sekä tämän tentin että laskuharjoituspisteitteni perusteella.

Kirjoita jokaiseen palauttamaasi paperiin, kumman vaihtoehdon olet valinnut! Mikäli tämä ei käy selvästi ilmi tai vaihtoehdosta B huolimatta vastaat viiteen tehtävään, koe arvostellaan vaihtoehdon A mukaisesti. Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä mitään apumateriaalia.

1. a) Itse kukin on varmaan kuullut puhuttavan sellaisesta pallopelistä kuin tennis. Ja kaikkihan me tiedämme, että tulokselliseen tenniksen peluuseen riittää klassisen mekaniikan tuntemus, eikö totta? Osoita nyt kurssilla oppimiesi tietojen avulla, että tennispallon (massa noin 60 g, halkaisija noin 7 cm) kanssa vastaan ei koskaan tule tilannetta — ainakaan käytännössä — jossa voisit syyttää kvanttimekaniikkaa etkä esimerkiksi vastustajan paremmuutta pelin huonosta kulusta. (3p)
b) Kurssilla on useassa yhteydessä puhuttu stationäärisistä tiloista. Kerro, mitä nuo stationääriset tilat oikein ovat ja missä kaikkialla niitä tulee vastaan. Mitä tapahtuisi atomeille, jos stationäärisiä tiloja ei olisi, vaan atomi olisi klassisen fysiikan hallitsema valtakunta? Entä miten ihmisessä voi hiukkanen, vaikkapa atomin elektroni, siirtyä stationääriseltä tilalta toiselle? Mikä siis saa aikaan transitiot ja millä edellytyksillä niitä tapahtuu? (5p)
2. Tarkastellaan yksiulotteiseen, äärettömään potentiaalikuoppaan joutunutta hiukkaspartakaa, jonka massa on m . Potentiaali on $V(x) = 0$, kun $-b \leq x \leq b$, muulloin $V(x) = \infty$. Kirjoita ja ratkaise ajasta riippumaton Schrödingerin yhtälö kaikissa fysikaalisesti erilaisissa alueissa ja selvitä systeemin normitetut ominaistilat sekä niiden energiat.
Osoita sitten, että Bohrin korrespondenssiperiaate on voimassa ts. klassisen fysiikan ja kvanttimekaniikan ennusteet lähestyvät toisiaan, kun ratkaisuihin pyörivä kvanttiluku n on riittävän suuri. Parhaiten tämä onnistuu toteamalla, että (i) kvanttimekaaninen todennäköisyysjakauma $p(x)$ lähestyy klassisen fysiikan mukaista tulosta (mieti millaisen todennäköisyysjakauman $p(x)$ saat kahden massiivisen betoniseinän väliin viritettyä kitkatonta, pingotettua lankaa pitkin nopeudella v liikuskelevalle helmelle) ja että (ii) suhteellinen muutos peräkkäisten ominaisenergiatilojen välillä on mitättömän pieni (diskreetti spektri muuttuu käytännössä jatkumoksi), kun $n \rightarrow \infty$. (8p)
3. Vetyatomi on joutunut superpositiotilaan, jonka aaltofunktio (ilman spiniä) hetkellä $t = 0$ on

$$\Psi(r, \theta, \phi, t = 0) = \frac{1}{2}\psi_{200} + \frac{\sqrt{6}}{4}\psi_{310} - \frac{1}{2}\psi_{31,-1} + A\psi_{322},$$

missä A on vakio ja funktiot ψ_{ijk} ovat vetyatomin ominaisfunktioita (lausekkeet löytyvät koepaperin lopusta), joita vastaavat ominaisenergiat ovat $E_n = -E_0/n^2$ ($E_0 \approx 13,6$ eV).

- a) Määritä vakio A siten, että aaltofunktio on oikein normitettu. (1,5p)
- b) Kun mitaat kulmaliikemäärän suuruutta ($|L|$) tai sen z -komponenttia (L_z), niin mitkä mitaustulokset ovat mahdollisia ja mitkä ovat niiden todennäköisyydet? (2,5p)
- c) Laske kokonaisenergian odotusarvo ko. tilassa olevalle vetyatomille. (2p)
- d) Miten aaltofunktio muuttuu, kun aika lähtee kulkemaan? Kirjoita siis $\Psi(r, \theta, \phi, t)$. Kerro (älä siis laske mitään vaan käytä sanoja!) mitä ominaisenergioille tapahtuu, jos Coulombin potentiaali muuttuukin varjostetun potentiaalilin muotoon $-\frac{Be^{-r/\lambda}}{r}$, missä B ja λ ovat positiivisia vakioita. Entä mitä voit tällöin sanoa aaltofunktion kulmariippuvista osuuksista? (2p)

KÄÄNNÄ

4. Kuvassa 1 on esitetty atomaarisen vetykaasun emissio- ja absorptiospektrit näkyvän valon alueella (ns. Balmerin sarja). Koska maailmankaikeuden näkyvästä aineesta noin 75 % on vetyä, kyseiset spektrit mahdollistavat mitä erilaisimpien avaruuden olioiden kuten tähtien tai kaasupilvien ominaisuuksien tutkimisen.

a) Selitä perusteellisesti mutta ytimekkäästi, miten spektrit muodostuvat ja mikseivät kaikki sateenkaaren värit ole mahdollisia, vaan spektrit koostuvat yksittäisistä viivoista. Kerro myös, miksi viivat ovat äärellisen paksuisia sekä millaisen spektrin molekylaarinen vetykaasu (H_2) muodostaisi. (2p)

b) Otetaan tarkastelun kohteeksi punainen H_α -viiva 656 nm kohdalla, jonka tiedetään olevan tekemisissä transition $3s \rightarrow 2p$ kanssa. Kun tuijotetaan viivaa oikein tarkasti, havaitaan sen koostuvan kahdesta osasta. Selitä, miksi ko. viiva on hajonnut kahtia ja kuinka lähellä tämä pariskunta oikein on toisiaan (suuruusluokka-arvio riittää). Kuvat ovat kivoja ja piristävät vastausta kummasti. Myös kvanttilukujen kuten j :n ja Δj :n arvoja on syytä sirotella vastaukseesi uskottavuuden lisäämiseksi. (3p)

c) Mitä viivoille tapahtuu, kun joku keksii laittaa magneettikentän päälle? Kuinka monta spektriviivaa nähdään ja kuinka "hienosta" rakenteesta nyt puhutaan? Miten tapaukset $B = 0,1$ T ja $B = 10$ T eroavat toisistaan? Viivojen lukumäärät riittävät, vastaavia taajuuksia ei tarvitse laskea. (3p)

5. Luettuasi pitkään ja hartaasti Fysiikka IIIA:n tenttiin nukahdat kirjoituspöytäsi ääreen ja alat nähdä outoa, Herra Tompkins -henkistä unta. Unessasi atomit ovat kasvaneet sinun kokoisiksi, mutta käyttäytyvät edelleen kvanttimekaniikan peruseriaatteiden mukaan. Sinä toimit paikallisen atomikaupungin maistraatin virkamiehenä, ja olet joutunut vastuuseen kaikista vihkimisiin, eroihin, lasten nimien rekisteröintiin yms. liittyvistä asioista. Päivänä eräänä luoksesi saapuu kaksi atomia, jotka haluavat laittaa hynttyynsä yhteen — ruveta molekyyliksi. Kerro atomeille, mitä vaihtoehtoja heillä on käytettävissään ja millä edellytyksillä liitto on mielestäsi kestäväällä pohjalla. Miten vastauksesi muuttuu, jos huoneesi ulkopuolella odottaa (i) kaksi booriatomia järjestysluvultaan vitosen suuruisia, (ii) vety- ja fluoriatomia tai (iii) kaksi heliumatomia? Muista olla yksityiskohtainen ja perusteellinen, sillä atomit pystyvät kommunikoimaan vain kvanttimekaniikan kielellä — arkipäivän pikaselitykset eivät heitä tyydytä! Kerro myös millaisia ominaisuuksia tulevalle molekyyllillä oikein on ja miksi.

Hengähdettyäsi hieman sinua tapaamaan saapuu vety-happi-pariskunta, joka on todennut liittonsa mahdottomaksi ja hakee eroa. Mieleesi tulee yksi ratkaisu, hieman epäkonventionaalinen tosin, jonka ehdit juuri kertoa pariskunnalle ennen heräämistäsi. Miten siis vety ja happi voivat muodostaa kestäväällä pohjalla olevan molekyylin? (8p)

Aputietoja:

$$h \approx 7 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, a_0 \approx 0,5 \text{ \AA}$$

Tarpeellisia vetyatomin radiaalifunktioita sekä palloharmonisia funktioita:

$$R_{20}(r) = 2 \left(\frac{1}{2a_0} \right)^{3/2} \left[1 - \left(\frac{r}{2a_0} \right) \right] e^{-r/(2a_0)}, \quad R_{31}(r) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{3a_0} \right)^{3/2} \frac{r}{a_0} \left(1 - \frac{r}{6a_0} \right) e^{-r/(3a_0)}$$

$$R_{32}(r) = \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \left(\frac{1}{3a_0} \right)^{3/2} \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 e^{-r/3a_0}$$

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}, \quad Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

Landén tekijä:

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$