Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Korte / Aro

Mat-1.1132 Peruskurssi C3-II

Tentti 4.9.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia. Koeaika on 4h.

Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoinen. Kaikki vastaukset on perusteltava huolellisesti.

1. Etsi matriisin A LU-hajotelma.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 8 & -4 & 9 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Päättele LU-hajotelman perusteella, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä $Ax = b$ voi olla?

2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Laske A:n ominaisarvot ja vektorit.

(b) Onko A diagonalisoituva? Entä ortogonaalisesti diagonalisoituva? Jos A on diagonalisoituva, diagonalisoi A.

(c) Laske matriisieksponentti e^A.

3. Esitä Gram-Schmidtin ortonormalisointimenetelmä. Sovella sitä vektorijoukon

$$\{(2, 0, 0)^T, (3, 3, 0)^T, (4, 5, 6)^T\}$$

ortonormalisointiin.

4. (a) Laske $\mathbb{R}^3$:n vektorinormiin

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

liittyvä matriisinormi matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Etsi myös vektori $b \in \mathbb{R}^3$ siten, että $\|b\|_1 = 1$ ja

$$\|Ab\|_1 = \|A\|_1.$$

5. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla seuraava alkuarvo-ongelma:

$$y'' + 4y = \sin t, \quad \text{kun } t > 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$$

Laplace-muunnoksia:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{at}f(t)) &= F(s-a) \\
\mathcal{L}(f * g) &= \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) \\
\mathcal{L}(f^{(n)}) &= s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \\
\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) &= e^{-as}F(s) \\
\mathcal{L}(t^n) &= n!/s^{n+1} \\
\mathcal{L}(\cos(\omega t)) &= s/(s^2+\omega^2) \\
\mathcal{L}(\sin(\omega t)) &= \omega/(s^2+\omega^2) \\
\mathcal{L}(u(t-a)) &= e^{-as}/s \\
\mathcal{L}(\delta(t-a)) &= e^{-as}
\end{aligned}$$