

## Mat-1.1010 Peruskurssi L1

### Välikoe 1 12.10.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Käyrällä  $S : y = y(x)$ ,  $0 < x \leq 1$  on ominaisuus:

Jos  $P = (x, y) \in S$ ,  $A = (x, 0)$ ,  $O = (0, 0)$  ja  $Q =$  käyrän pisteeseen  $P$  asetetun tangentin ja positiivisen  $y$ -akselin leikkauspiste, niin nelikulmion  $OAPQ$  pinta-ala = 3.

a) Johda funktiolle  $y(x)$  differentiaaliyhtälö ja totea, että eräs tämän yksittäisratkaisu on muotoa  $y(x) = b/x$  ( $b =$  vakio).

b) Määritä  $y(x)$ , kun asetetaan lisäehto  $y(1) = 5$ .

2. a) Oletetaan kunta-aksiomat sekä tulos  $0 \cdot x = 0 \forall x$  ( $\forall x =$  jokaiselle kunnan alkion  $x$ ).  
Johda oletuksista tulos  $-x = (-1) \cdot x \forall x$ .

b) Tiedetään, että järjestetyssä kunnassa pätee  $0 < 1$  ja  $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$ . Vedoten näihin väittämiin, kunta-algebraan ja järjestysrelaation aksiomiin näytä, että järjestetyssä kunnassa pätee myös  $x > 0 \wedge y > 1 \Rightarrow 0 < xy^{-1} < x$ .  $\gamma > |$

3. Lukujonosta  $\{b_n\}$  tiedetään ainoastaan, että  $0 \leq b_n \leq 2009 \forall n$ . Näytä suoraan lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella (vetoamatta raja-arvoja koskeviin lauseisiin), että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + 2n}{2b_n + n} = 2.$$

4. Tarkastellaan palautuvaa lukujonoa

$$a_0 = 3, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

a) Näytä induktiolla, että  $a_n > 1 + \sqrt{2} \forall n$ .

b) Perustuen a)-kohdan tulokseen näytä, että  $\{a_n\}$  on aidosti vähenevä lukujono.

c) Päättele (tunnettuihin lauseisiin vedoten), että lukujono  $\{a_n\}$  on suppeneva ja määritä raja-arvo  $a = \lim_n a_n$ .