

Ensimmäinen välikoe

1. (6p) **3d pallosymmetrinen potentiaali ja kvanttimekaniikan kuvat**
Selitä lyhyesti seuraavat käsitteet
 - a) Vedyntkaltaisen atomin (ydin ja yksi elektroni) efektiivinen massa
 - b) Radiaalinen Schrödingerin yhtälö
 - c) Schrödingerin ja Heisenbergin kuvien ero
2. (6p) **Diracin notaatio**
 - a) Osoita että tilavektorien sisätulo samaistuu aaltofunktioiden L_2 sisätuloon:
 $\langle \psi | \psi' \rangle = \int dx \psi(x)^* \psi'(x)$.
 - b) Olkoon ortonormaali kanta $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Määritellään $|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle$ ja $|\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$. Voiko lineaarioperaattori $A = |\alpha\rangle\langle\beta|$ olla observaabeli?
 - c) Olkoon alussa kvanttimekaanisen systeemin tila $|\Psi\rangle$. Operoidaan tilaan *projektio-operaattorilla* $P = |\phi\rangle\langle\phi|$, missä tila $|\phi\rangle$ on jokin mielivaltaisen tila. Jos $P|\Psi\rangle = 0$, mitä voit sanoa tilasta $|\Psi\rangle$?
3. (6p) **Pyörimismääräoperaattorialgebraa ja Stern-Gerlach-koe**
Tarkastellaan pyörimismääräoperaattoria \mathbf{L} , jonka komponentit toteuttavat kommutaatiorelaatiot $[L_x, L_y] = i\hbar L_z, [L_z, L_x] = i\hbar L_y$, ja $[L_y, L_z] = i\hbar L_x$.
 - a) Osoita, että pyörimismääräoperaattorin z -komponentti, L_z , ja pyörimismääräoperaattorin neliö $\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ kommutoivat keskenään ja että niillä on siis yhteiset ominaistilat $|lm\rangle$. Oletetaan, että $L_z|lm\rangle = \hbar m|lm\rangle$ ja $L^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle$.
 - b) Osoita, käyttäen nosto- ja laskuoperaattorien $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ kommutaatiorelaatioita, että näitä operaattoreita voidaan käyttää tilan $|lm\rangle$ pyörimismäärän z -komponentin nostoon ja laskuun. (Osoita ensin että tila $L_{\pm}|lm\rangle$ on operaattorien \mathbf{L}^2 ja L_z ominaistila. Mikä on tämän tilan m -kvanttiluku?)
 - c) Kirjoita operaattori L_x käyttäen nosto- ja laskuoperaattoreita. Mitä tapahtuu tilan pyörimismääräkvanttiluvulle l kun siihen operoidaan operaattorilla L_x ? Mitä tapahtuu pyörimismäärälle Stern-Gerlach-kokeessa? (Ensin mittaat L_z :n, sitten L_x :n ja sitten jälleen L_z :n.)

Vihje: Tämä tehtävä ei edellytä nosto-, lasku-, ja pyörimismääräoperaattorien ominaisuuksien tuntemista/muistamista.

Käännä!

4. (6p) **Identtiset hiukkaset**

Kirjoita essee selvittäen ongelmia joita kohdataan kuvattaessa kvanttimekaanisesti identtisiä hiukkasia. Kerro kuinka nämä ongelmat ratkaistaan ja mitä siitä seuraa. Pohdi erityisesti kahden identtisen hiukkasen tapausta mutta mieti myös lyhyesti yleisempää N :n hiukkasen tapausta, erityisesti bosonisten ja fermionisten hiukkasten tapauksessa. Voit vapaasti käyttää yhtälöitä ja kuvia asioiden esitykseen.