

Teknillinen korkeakoulu

Peltonen, Eirola / Vesanen

Mat-1.1030, Matematiikan peruskurssi L 3

1. välikoe, 13. 10. 2009

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmalyhenteet: AUT, BIO, EST, GMA, INF, KEM, KON, KTA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TLT, TIK, TUO

1. Olkoon  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ehdon

$$z = x + iy \mapsto x^3 + i(1 - y)^3$$

määrää kuvaus. Määrää ne kompleksitason pisteet  $z$ , joissa  $f$  on

- (a) derivoituva,
- (b) analyyttinen.
- (c) Määrää funktion  $f$  derivaatta  $f'(z) \in \mathbb{C}$  niissä kompleksitason pisteissä, joissa se on olemassa.

2. Etsi Möbius-kuvaus, joka kuvaa alueen  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$  alueeksi  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ .

3. Määrää funktion

$$f : f(z) = \oint_{\gamma} \frac{2w^2 - w - 1}{w(w - z)e^{\pi i(w-1)}} dw$$

arvo pisteissä

- (a)  $z = 1$
- (b)  $z = 2$
- (c)  $z = 4$

kun integrointi tehdään pitkin polkua  $\gamma$ , joka parametrisoi ympyrän

$$S(0, 3) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$$

yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan.

4. Muodosta kaksi muuttujan  $z$  potenssien mukaan etenevää sarjakehitelmää ehdon

$$z \mapsto \frac{1}{z(1 + z^2)}$$

määräämälle funktiolle  $f$ . Missä ne ovat voimassa?

1. Let  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  be the mapping defined by condition

$$z = x + iy \mapsto x^3 + i(1 - y)^3.$$

Find those points  $z$  in the complex plane, where  $f$  is

- (a) differentiable,
  - (b) analytic.
  - (c) Find the derivative  $f'(z) \in \mathbb{C}$  of  $f$  at those points where it exists.
2. Find a Möbius mapping, that maps domain  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$  to domain  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$ .
3. Find the value of function

$$f : f(z) = \oint_{\gamma} \frac{2w^2 - w - 1}{w(w - z)e^{\pi i(w-1)}} dw$$

at points

- (a)  $z = 1$
- (b)  $z = 2$
- (c)  $z = 4$

when integration is performed along path  $\gamma$  that parametrizes circle

$$S(0, 3) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$$

once counterclockwise.

4. Find two series in terms of powers of variable  $z$  for function  $f$  defined by condition

$$z \mapsto \frac{1}{z(1 + z^2)}.$$

Where are these series valid?