

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

2. välikoe 16.11.2009

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä.
Laskutikku on sallittu, mutta tuskin hyödyllinen. Koeaika on 3h.

1. Määritä luku $p > 0$ siten, että raja-arvo

$$L(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{\sqrt{x+h^p} - \sqrt{x}} \quad \text{jossa } x > 0$$

on olemassa positiivisena reaalityönä. Laske tällöin luku $L(x)$ kullakin $x > 0$.

Vihje: Käytä hyväksesi tunnettua raja-arvoa $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = ?$

2. a) Etsi käyrän $x + y^2 + y \sin x = y^3 + \pi$ tangentin yhtälö pisteessä $(x, y) = (\pi, 1)$.
b) Määritellään funktio $f(x) = \ln x + x^2$ määrittelyjoukossa $x > 0$. Hahmottele kuvaajaa. Miksi f :llä on käänteisfunktio; perustele tämä matemaattisesti. Mikä on käänteisfunktion määrittelyjoukko?

Vihje b-kohtaan: Käänteisfunktiolle ei voi kirjoittaa kaavaa ainakaan helposti.

3. a) Etsi jokin ratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$x'(t) + x(t) = t^2 e^t \quad \text{jossa } t \geq 0.$$

Vihje: Käytä yrittäenä funktiota $p(t)e^t$ jossa p on (mahdollisimman matala-asteinen) polynomi.

- b) Tarkastellaan massajousisysteemin differentiaaliyhtälöä

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0 \quad \text{kun } t \geq 0.$$

Etsi yhtälön ratkaisu alkuehdoilla $y(0) = 1$ ja $y'(0) = i$, missä $i^2 = -1$.

4. Etsi epähomogeenisen differentiaaliyhtälön $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^{\alpha t}$ yleinen ratkaisu, kun $\alpha \neq 1$ tai -3 . Mitä tapahtuu yleisen ratkaisun lausekkeelle kun $\alpha \rightarrow 1$?

Jokeritehtävä: Jos koeaikaa on jäljellä, niin keksipä yksittäisratkaisu tehtävän 4. epähomogeeniselle yhtälölle tapauksessa $\alpha = 1$. Jokeritehtävästä voit saada tämän välikokeen pistemääräsi yhden lisäpisteen, mutta välikokeen maksimipistemäärä on silti 24p.