

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmalyhenteet: AUT, BIO, EST, GMA, INF, KEM, KON, KTA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TLT, TIK, TUO

1. Mitkä seuraavista joukoista ovat vektoriavaruuksia?

- (a) Välillä  $(0, 1)$  määritellyt kahdesti derivoituvat reaalfunktiot.
- (b) Välillä  $[0, 1]$  määriteltyjen funktioiden  $x \mapsto \sin(k\pi x)$  ja  $x \mapsto \cos(k\pi x)$  joukko, kun  $k \in \{0, 1, \dots\}$ .
- (c) Muotoa  $(a, b, c)$  olevien vektorien kokoelma kun  $a, b$  ja  $c$  ovat positiivisia reaalityyppisiä lukuja.

Perustele vastauksesi.

2. Olkoon  $V$  yhden reaalimuuttujan reaalipolynomien muodostama vektoriavaruus. Mitkä seuraavista kuvauksista  $A : V \rightarrow V$  ovat lineaarisia? Myönteisessä tapauksessa selvitä myös onko kuvaus injektio tai surjektio. Miksi?

- (a)  $A : A(p) = p^{(k)}$ , missä  $p^{(k)}$  on funktion  $p \in V$   $k$ :s derivaatta,  $k \in \mathbb{N}$ ,
- (b)  $A : A(p) = p^2$ ,  $t \mapsto (p(t))^2$ ,
- (c)  $A : A(p) = p(2)p$ ,  $t \mapsto p(2)p(t)$ .

3. Tarkastellaan välillä  $[0, 1]$  määriteltyjen jatkuvien reaalityyppisten funktioiden muodostamaa vektoriavaruutta  $V = C[0, 1]$  varustettuna sisätulolla

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Olkoon  $U$  polynomien  $\{p_1, p_2, p_3\}$  virittämä  $V$ :n vektoriavaruus, missä  $p_1 : p_1(t) = 1$ ,  $p_2 : p_2(t) = 2t - 1$  ja  $p_3 : p_3(t) = 12t^2$ .

- (a) Muodosta  $U$ :lle ortogonaalinen kanta.
- (b) Määrää funktiota  $t \mapsto e^t$ ,  $t \in [0, 1]$  parhaiten approksimoiva funktio aliavaruudesta  $sp\{p_1\}$ .

4. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

- (a) Määrää matriisnormit  $\|A\|_\infty$  ja  $\|A\|_1$ .
- (b) Mikä seuraavista kompleksitason joukoista antaa tarkimman arvion  $A$ :n ominaisarvoille: reaaliakselin väli  $[7, 14]$  tai  $[8, 12]$  tai kuula  $\bar{B}(10.5, 3.5)$ ? Miksi?
- (c) Anna edellisen kohdan perusteella yläraja matriisnormille  $\|A\|_2$ .