TKK, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Rasila/Quach

Mat-1.1230 peruskurssi S3 syksy 2009

1. välikoe Ti 13.10.2009 klo 16.00-19.00

1. (a) Esitä funktio $f(z) = 1/\bar{z}$ muodossa $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, missä $z = x + iy$.

(b) Etsi yhtälön $z^4 + i = 0$ kaikki ratkaisut kompleksitasossa.

(c) Onko funktio $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$, missä $z = x+iy$, analyyttinen jossakin alueessa $D \subset \mathbb{C}$? Perustele vastauksesi.

Ratkaisu:

(a) Sievennetään annettua funktiota $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\bar{z}} \\ &= \frac{1}{\overline{x+iy}} \\ &= \frac{1}{x-iy} \\ &= \frac{1}{x-iy} \cdot \frac{x+iy}{x+iy} \\ &= \frac{x+iy}{(x-iy)(x+iy)} \\ &= \underbrace{\frac{x}{(x^2+y^2)}}_{=u(x,y)} + i \underbrace{\frac{y}{(x^2+y^2)}}_{=v(x,y)} \end{aligned}$$

(b) Kirjoitetaan annettu yhtälö muodossa

$$z^4 = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2}i + 2\pi i n},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$. Ottamalla yhtälöstä juuret ja käyttämällä DeMoivren kaavaa saadaan

$$z = e^{-\frac{\pi}{8}i + \frac{\pi}{2}in}.$$

Tällöin ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{cases} z = e^{-\frac{\pi}{8}i}, \\ z = e^{\frac{3\pi}{8}i}, \\ z = e^{\frac{7\pi}{8}i}, \\ z = e^{\frac{11\pi}{8}i}. \end{cases}$$

(c) Tutkitaan $f(z)$:n analyyttisyyttä Cauchy–Riemann yhtälöiden avulla.

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-x}(\cos y - i \sin y) \\ &= \underbrace{e^{-x} \cos y}_{=u(x,y)} + i(\underbrace{-e^{-x} \sin y}_{=v(x,y)}). \end{aligned}$$

Laskemalla osittaisderivaata saadaan

$$\begin{cases} u_x = -e^{-x} \cos y, \\ u_y = -e^{-x} \sin y, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} v_x = e^{-x} \sin y, \\ v_y = -e^{-x} \cos y. \end{cases}$$

Osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja toteuttavat Cauchy–Riemann yhtälöt kaikilla x, y eli $f(z)$ on analyyttinen koko $\mathbb{C}$:ssä.

2. Ovatko seuraavat funktiot harmonisia? Jos kyllä, etsi harmoninen konjugaattifunktio.

(a)
$$u(x,y) = x^2 - 2xy + y^2,$$

(b)
$$u(x,y) = -3x(y+1)^2 + x^3.$$

Ratkaisu: Funktiota $u(x,y)$ sanotaan *harmoniseksi*, jos se toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

(a) Ei ole:

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

(b) Funktio on harmoninen:

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 6x - 6x = 0.$$

Etsitään funktio v siten, että $f = u + \mathrm{i}v$ on analyyttinen. Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3(y+1)^2 + 3x^2 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Integroimalla y:n suhteen saadaan

$$v(x,y) = -\frac{3}{3}(y+1)^3 + 3x^2 y + h(x)$$

ja

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Cauchy-Riemannin yhtälöistä saadaan edelleen

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy - \frac{\partial h}{\partial x} = -6x(y+1) = \frac{\partial u}{\partial x},$$

eli

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 6xy + 6x - 6xy = 6x,$$

joten integroimalla saadaan $h(x) = 3x^2 + C$. Siis

$$v(x,y) = 3x^2 + 3x^2y - (y+1)^3 \qquad [+C].$$

3. Laske kompleksinen polkuintegraali

$$\int_C |z|\,dz,$$

kun C on (a) pisteitä $[-i, i]$ yhdistävä jana, ja (b) origokeskisen puoliympyrän kaari, jonka päätepisteet ovat $-i$ ja i, myötäpäivään kierrettynä.

Ratkaisu: Lasketaan tehtävän integraalit käyttäen polkuintegraalin kaavaa

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt.$$

(a) Annettu polku voidaan parametrisoida seuraavasti

$$\begin{cases} z(t) = -i + it, & t \in [0,2], \\ z'(t) = i. \end{cases}$$

Tällöin integraali voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \int_C |z|\,dz &= \int_0^2 |-i+it| \cdot i\,dt \\ &= i \cdot \int_0^2 |-1+t|\,dt \\ &= i \cdot \underbrace{\int_0^1 1-t\,dt}_{=\frac{1}{2}} + i \cdot \underbrace{\int_1^2 -1+t\,dt}_{=\frac{1}{2}} \\ &= i. \end{aligned}$$

(b) Ympyrän parametrisointi on muotoa

$$\begin{cases} z(t) = e^{it}, \\ z'(t) = ie^{it}, \end{cases}$$

missä $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$ tai $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}\right]$, riippuen puoliympyrän valinnasta. Ensimmäisessä valinnassa puoliympyrä sijaitsee oikeassa puolitasossa ja jälkimmäisessä vasemassa puolitasossa. Tapaukset ovat kuitenkin analogia, joten käsitellään ensimmäinen tapaus.

$$\begin{aligned} \int_C |z|\,dz &= \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \underbrace{|e^{it}|}_{=1} \cdot ie^{it}\,dt \\ &= \Big/_{\pi/2}^{-\pi/2} e^{it} \\ &= -e^{-\frac{\pi}{2}i} - e^{\frac{\pi}{2}i} \\ &= -2i. \end{aligned}$$

Toisessa tapauksessa vain integraalin rajat muuttuvat ja integraalin arvoksi saadaan $2i$.

4. Laske residymenetelmää käyttäen integraalin

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{7 + 6\cos\theta}$$

arvo.

Ratkaisu: Integraalin laskemiseksi tehdään sijoitus

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \\ d\theta = \dfrac{dz}{iz}. \end{cases}$$

Tällöin tehtävän integraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{7 + 6\cos\theta} = \int_C \frac{1}{7 + 6 \cdot \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{iz} dz,$$

missä käyrä C on yksikköympyrä kierrettynä positiiviseen suuntaan (vas-

tapäivään). Sievennetään polkuintegraalia

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{7+6\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{iz}dz &= \int_C \frac{dz}{\underbrace{(3z^2+7z+3)}_{3(z-z_1)(z-z_2)}i}\\ &= \int_C \frac{dz}{3i(z-z_1)(z-z_2)}\\ &= \frac{1}{3i}\cdot\int_C \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)},\end{aligned}$$

missä

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{6}\cdot\left(-7+\sqrt{13}\right) \in \mathbb{D},\\ z_2 = \frac{1}{6}\cdot\left(-7-\sqrt{13}\right) \notin \mathbb{D}.\end{cases}$$

Lisäksi

$$z_1 - z_2 = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Omamurtohajotelman avulla integraali voidaan esittää muodossa

$$\int_C \frac{dz}{3i(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{3i}\cdot\int_C \frac{A}{z-z_1}dz + \frac{1}{3i}\cdot\int_C \frac{B}{z-z_2}dz,$$

missä kertoimet A ja B voidaan laskea residymenetelmällä.

$$\begin{aligned}A &= \lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)\cdot\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]\\ &= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2}\\ &= \frac{1}{z_1-z_2}\\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{3}}\\ &= \frac{3}{\sqrt{13}}.\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan $B = -\frac{3}{\sqrt{13}}$. Näin ollen

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{7+6\cos\theta} = \frac{1}{3i}\cdot\int_C \frac{A}{z-z_1}dz + \frac{1}{3i}\cdot\int_C \frac{B}{z-z_2}dz,$$

Soveltamalla Cauchyn interaalilausetta ja -kaavaa saadaan

$$\begin{cases}\int_C \frac{A}{z-z_1}dz = 2\pi i A,\\ \int_C \frac{B}{z-z_2}dz = 0.\end{cases}$$

Lopulta interaalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{7+6\cos\theta} &= \frac{1}{3i}\cdot 2\pi i A\\ &= \frac{1}{3i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{13}}.\end{aligned}$$

Kaavoja:

Hyperboliset ja trigonometriset funktiot:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Cauchy-Riemannin yhtälöt:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y).$$

Möbius-kuvaukset:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

Polkuintegraali:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\big(z(t)\big) z'(t)\,dt.$$

Cauchyn integraalilause:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Cauchyn integraalikaava:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

Laurentin sarja:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

Residylause:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$