Matematiikan ja systeemianalyysin laitos Kangaslampi/Rasila/Quach

TKK – Mat-1.1230 peruskurssi S3 Syksy 2009

2. välikoe Ti 17.11.2009 klo 16.00-19.00

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

1. Ratkaise Z-muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y(n+2) - 6y(n+1) - 55y(n) = 0, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

2. Oletetaan, että $c > 0$ ja

$$f(t) = \begin{cases} -ct, & \text{kun } -\pi \le t < 0, \\ ct, & \text{kun } 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

Laske funktion $f(t)$ Fourier-sarja (f:n jakso on 2π).

3. a) Miten lasketaan funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Fourier-muunnos $\hat{f}(\omega)$? Entä käänteismuunnos takaisin funktioksi $f(x)$? Mitä Fourier-muunnos tekee? Kuvaile parilla lauseella. (2p)

b) Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & |x| < 10 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \quad \text{ja} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Laske funktioiden f ja g sekä näiden konvoluution $f * g$ Fourier-muunnokset. (4p)

4. Ratkaise matriisiyhtälö $Az = c$ matriisin A LU-hajotelman $A = LU$ avulla, kun

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Huom! Käytä LU-hajotelmassa Doolittlen menetelmää, eli kiinnitä alakolmiomatriisin L diagonaalialkiot ykkösiksi.

Fourier-sarjoihin liittyviä kaavoja ilman selityksiä

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2ik\pi t/T}\,dt \\ a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \\ a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt,\ k \ge 1 \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)dt \end{aligned}$$

Parsevalin kaava:

$$\frac{2}{T}\int_r^{r+T} f(t)^2\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja

Jos $A(z) = Z(a_n)$, niin

$$Z(na_n) = -zA'(z),\ Z(c^n a_n) = A(z/c),$$

$$Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0),\ Z(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z).$$

Muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$

S3 2. Välikoe

1. $y(n+2) - 6y(n+1) - 55y(n) = 0 \qquad y(0)=0$
$\qquad y(1)=1$

Z-muunnetaan

$$z^2\left(Y(z) - y(0) - \frac{y(1)}{z}\right) - 6z\left(Y(z) - y(0)\right) - 55Y(z) = 0$$

sij. alkuarvot

$$\Rightarrow z^2\left(Y(z) - \frac{1}{z}\right) - 6zY(z) - 55Y(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2Y(z) - 6zY(z) - 55Y(z) = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z^2 - 6z - 55}$$

Osamurtohajotelma oikealle puolelle:

nimittäjän 0-kohdat

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 1\cdot(-55)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{6 \pm 16}{2} \Rightarrow z = -5 \vee z = 11$$

$$\frac{1}{z^2-6z-55} = \frac{1}{(z-11)(z+5)} = \frac{A}{z-11} + \frac{B}{z+5} = \frac{A(z+5)+B(z-11)}{(z-11)(z+5)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 5A-11B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 5A-11B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{16} \\ B=-\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{16}\frac{1}{z-11} - \frac{1}{16}\frac{1}{z+5} \Leftrightarrow Y(z) = \frac{1}{16}\frac{z}{z-11} - \frac{1}{16}\frac{z}{z-(-5)}$$

Käänteismuunnetaan: $\quad Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-\alpha}\right\} = \alpha^n$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{16}11^n - \frac{1}{16}(-5)^n$$

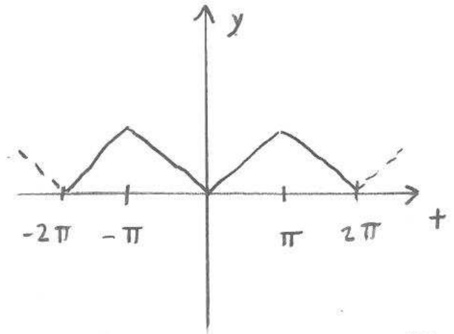
Pisteytys:

- oikein laskettu Z-muunnos +2p
- – " – osamurto +2p
- – " – käänteismuunnos +2p

2.

$$f(t) = \begin{cases} -ct & \text{, kun } -\pi \le t < 0 \\ ct & \text{, kun } 0 \le t < \pi \end{cases}$$

jakso $T = 2\pi$



f parillinen funktio $\Rightarrow$ Fourier sinikertoimet $b_k = 0$

Fourier-sarja:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right)$$

$$\overset{\text{nyt}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

Lasketaan kertoimet: $T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -ct\,dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} ct\,dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \Big/_{-\pi}^{0} ct^2 + \frac{1}{2\pi} \Big/_{0}^{\pi} ct^2 = \frac{1}{2\pi}\left(c\pi^2 + c\pi^2\right) = c\pi$$

$k \ge 1$ $$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\,dt$$

integrandi parillinen

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cos(kt)\,dt = \frac{2c}{\pi} \int_{0}^{\pi} t \cos(kt)$$

osittaisintegrointi

$$= \underbrace{\frac{2c}{\pi k} \Big/_{0}^{\pi} t \sin(kt)}_{=0} - \frac{2c}{\pi k} \int_{0}^{\pi} \sin(kt) = \frac{2c}{\pi k^2} \Big/_{0}^{\pi} -\cos(kt)$$

$$= \frac{2c}{\pi k^2}\left(\cos(\pi k) - 1\right) = \frac{2c}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{c\pi}{2} + \frac{2c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(kt)$$

Pisteytys:

- oikeat lähtökohdat +2p (parillisuus, kuva oikein, a_0)
- oikein lasketut a_k ja b_k +2p
- oikeanlainen Fourier-sarja +2p

Mat-1.1230

S3 2. välikoe

3. a) $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$$

Fourier-muunnos kuvaa funktion aika-alueesta taajuusalueeseen siten, että alkuperäisen funktion hallitsevat muodot kuvautuvat lähelle pystyakselia. Hyödyllinen työkalu esim. signaalin käsittelyssä

2 p.

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & |x| < 10 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0 & \text{muull.} \end{cases}$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-10}^{10} e^{-x} e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-10}^{10} e^{-x(1+i\omega)}\, dx$$

$$= -\frac{1}{1+i\omega} \Big/_{-10}^{10} e^{-x(1+i\omega)} = \frac{1}{1+i\omega}\left(e^{10(1+i\omega)} - e^{-10(1+i\omega)}\right)$$

$$= \frac{1}{1+i\omega}\left(e^{i10(\omega-i)} - e^{-i10(\omega-i)}\right)$$ 2 p.

$1-i\omega$

$$= \frac{2i}{1+i\omega}\sin[10(\omega-i)] = \frac{2(i+\omega)}{1+\omega^2}\sin[10(\omega-i)]$$

$$= \frac{2}{\omega-i}\sin[10(\omega-i)]$$

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\,dx = -\frac{1}{i\omega}\Big|_{-1}^{1} e^{-i\omega x}$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right) = \frac{2}{\omega}\sin(\omega)$$ 1 p.

$$\widehat{(f*g)}(\omega) = \hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)$$

$$= \frac{4}{\omega(\omega-i)}\sin[10(\omega-i)]\sin(\omega)$$ 1 p.

Täydet pisteet sai sieventämättä eksponenttifunktiomuotoja.

4. $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} \end{bmatrix}$$

Vertailemalla A:han saadaan

$u_{11} = 6$ ja $u_{12} = 9$

$l_{21}u_{11} = 4 \iff l_{21} = \frac{2}{3}$

$l_{21}u_{12} + u_{22} = 5$

$$u_{22} = 5 - \frac{2}{3} \cdot 9 = -1$$

Joten $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix}$ ja $U = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3 p.

$Az = L\underbrace{Uz}_{y} = c$

$\begin{cases} Ly = c & (1) \\ Uz = y & (2) \end{cases}$

(1): $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2/3 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{3}}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$

$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ -5/3 \end{bmatrix}$

(2): $\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$ I : 6 $\longrightarrow$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 1/6 \\ 0 & -1 & -5/3 \end{array}\right]$ 3/2

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{6}-\frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -5/3 \end{array}\right]$ II $\cdot(-1)$ $\longrightarrow$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 5/3 \end{array}\right]$

$z = \begin{bmatrix} -7/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$

3 p.

Ilman LU-hajotelmaa ratkaistu yhtälö: -2 p.