

Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II

Ei laskimia! Jokainen tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Jollei erikseen mainita, moniosaisten tehtävien osien arvot ovat yhtäsuuret. **PERUSTELE VASTAUKSESI!**

Tentti 14.12.2009

1. Tutki ovatko seuraavat väittämät tosia vai epätosia. Muista perustella vastauksesi.

- (a) Jokainen lineaarisesti riippumaton joukko $\mathbb{R}^3$:ssa on ortogonaalinen.
- (b) Kääntyvän matriisin A häiriöalttius $\kappa_\infty(A)$, matriisinormissa $\|A\|_\infty$ mitattuna, on aina vähintään 1.
- (c) Olkoon matriisi A kääntyvä ja olkoon sillä Cholesky-hajotelma. Tällöin A on positiividefiniitti.
- (d) Jos matriisi on diagonalisoituva, se on kääntyvä.
- (e) Funktion $F(s) = 1/(s + 25)$ Laplace-käännteismuunnos on $f(t) = 5 + e^{5t}$.
- (f) Jos Q on ortogonaalinen matriisi matriisilla QA on samat singulaariarvot kuin matriisilla A .

2. Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ovat 0, 1 ja 4.

- (a) [3 pistettä] Ratkaise homogeeninen differentiaaliyhtälösystemi

$$Y'(t) = AY(t).$$

- (b) [1 piste] Ratkaise yhtälöön liittyvä alkuarvotehtävä $Y(0) = (3 \ 2 \ -2)^T$.

- (c) [2 pistettä] Etsi jokin yksittäisratkaisu epähomogeeniselle yhtälölle

$$Y'(t) = AY(t) - e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

käyttämällä sopivaa yritettä.

3. Etsi pienimmän neliösumman ratkaisu yhtälölle $Ax = b$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

→
Käännä

4. Vektorit $x_1 = \frac{1}{2}(1 \ 1 \ 1 \ -1)^T$ ja $x_2 = \frac{1}{6}(1 \ 1 \ 3 \ 5)^T$ muodostavat ortonormaalien joukon $\mathbb{R}^4$:ssa. Täydennä joukko avaruuden $\mathbb{R}^4$ ortonormaaliksi kannaksi etsimällä ortonormaali kanta matriisiin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

nolla-avaruudelle $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$.

5. Laske matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

singulaariarvohajotelma.