

Mat-1.1131 Peruskurssi C3-I

Tentti 19.12.2009

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 4h.

1. Etsi kaikki yhtälöiden

a) $\operatorname{Ln}(z) = 1 - i\pi/2$,

b) $\sin(z) = -3i$

kompleksiset ratkaisut muodossa $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Etsi funktioiden

a) $1/z$.

b) $\cos(z)$

Taylorin sarjat kehityskeskukseksi $z = i$. Mitkä ovat sarjojen suppenemissäteet?

3. Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

2π -jaksollinen Fourier-sarja. Mikä on funktion f ja sen Fourier-sarjan yhteys välillä $(\pi, 3\pi)$. Laske myös f :n Fourier-muunnos.

4. Olkoon $f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $f(z) = f(x + iy)$, analyyttinen funktio, jonka reaaliosa $\operatorname{Re}(f(z)) = xy$. Laske f :n imaginääriosaa ja perustele tarkoin, miksi saamasi funktio f on todella analyyttinen.

5. Olkoon

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - (1+i)z + i}$$

kompleksi-arvoinen funktio. Laske integraali $\int_C f(z) dz$, kun käyrä C on positiiviseen kiertosuuntaan kerran kierrettynä

a) 2-säteinen ympyrä keskipisteenään origo,

b) 1-säteinen ympyrä keskipisteenään $-i$,

c) 1-säteinen ympyrä keskipisteenään i .