Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston Teknillinen korkeakoulu

Malinen

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

Tentti tai välikokeen uusinta 14.1.2010

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Välikoe 1: Tehtävät 1-4.
Välikoe 2: Tehtävät 5-8.
Välikoe 3: Tehtävät 9-12.
Tentti: Tehtävät 1, 4, 5, 7, 10 ja 11.

Kokeessa EI saa käyttää mitään sähköllä toimivia apuvälineitä.
Kirjoita tenttipaperiin onko kyseessä tentti vai välikokeen uusinta. Koeaika on 4h.
Tehtäväpaperi on kaksipuolinen.

1. (a) Määritä kompleksilukujen $z = 2+2i$ ja $w = -3e^{i\frac{\pi}{4}}$ trigonometriset muodot (siis muoto $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ jossa $r > 0$) ja laske niiden avulla $\bar{z}\bar{w}$ ja $\bar{z}/\bar{w}$.

   (b) Anna esimerkki kompleksitason pisteestä z joka toteuttaa yhtälön $\left|z - \frac{1}{z}\right| = 1$. Missä pisteissä joukko
   $$\left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1}{z}\right| = 1\right\}$$
   leikkaa kompleksitason yksikköympyrän (eli joukon $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$)?

2. Ratkaise x_1 yhtälösysteemistä
   $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$
   Cramerin säännön avulla.

3. Millä vakion c arvoilla yhtälöryhmällä
   $$\begin{cases} x - 2y + 3z &= 7 \\ 4x + y &= c \\ 2x + 5y - 6z &= 9 \end{cases}$$
   on

   a) äärettömän monta ratkaisua,

   b) täsmälleen yksi ratkaisu,

   c) ei yhtään ratkaisua?

4. Laske A^{2010} diagonalisoimalla A, kun $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.
   Vihje: Vastaukseen on lupa jättää kokonaislukujen isoja potensseja.

5. (a) Olkoon $f(t) = t^{\ln(t)}$ kun $t > 0$. Määritä $f'(t)$.

(b) Osoita jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuuden eli "Bolzanon merkinvaihtolauseen" (the intermediate value theorem) avulla, että yhtälöllä

$$x^3 + a = \cos x$$

on ratkaisu x kaikilla parametrin arvoilla $a \in \mathbb{R}$.
Vihje: Piirrä kuva jollain luvun a arvolla. Miten kuvasi muuttuu, jos muutat luvun a arvoa?

6. (a) Näytä, että $f(x) = x^5 + x$ on injektio (one-to-one) $\mathbb{R}$:ssä, ja laske derivaatan $(f^{-1})'(2)$ arvo. Huomaa, että $f(1) = 2$.

(b) Etsi käyrän $x + 2y + 1 = \frac{y^2}{x-1}$ tangentin yhtälö pisteessä $(2, -1)$.

7. Ratkaise differentiaaliyhtälö $x''(t) + 6x'(t) + 10x(t) = \sin t$ kun $t \geq 0$ alkuehdoilla $x(0) = 1$ ja $x'(0) = 0$.

8. Etsi epähomogeenisen differentiaaliyhtälön $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^{\alpha t}$ yleinen ratkaisu, kun $\alpha \neq 1$ tai -3. Mitä tapahtuu yleisen ratkaisun lausekkeelle kun $\alpha \to 1$?

9. Laske joko l'Hospitalin säännöllä tai Taylorin polynomilla raja-arvot

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^4}; \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1-x)}.$$

10. (a) Laske osittaisintegroimalla

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx.$$

(b) Laske integraali

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx$$

käyttämällä sijoitusta $e^{-x} = t$.

11. Laske likiarvo luvulle $\sqrt{24}$ käyttäen funktion $f(x) = \sqrt{x}$ lineaarista approksimaatiota $L(x)$ pisteessä $a = 25$. Arvioi approksimaatiovirheen kokoa käyttäen jäännöstermin lauseketta

$$f(x) - L(x) = \frac{f''(\eta)}{2}(x-a)^2 \text{ jossa } \eta \in (a, x).$$

12. Määritellään funktio $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(t) = 1 - t$ kun $t \in [0, 1]$ ja $f(t) = 0$ kun $t > 1$. Laske tämän funktion Laplace-muunnos

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt$$

jossa $s > 0$.