Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Alestalo/Blåfield

Mat-1.1310 Peruskurssi K1

Tentti/uusintavälikoe 14.1.2010

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h välikokeeseen, 4h tenttiin.

VASTAA VAIN joko TENTIN tai YHDEN VÄLIKOKEEN KYSYMYKSIIN!
TENTTI: Valitse viisi (5) tehtävää seuraavista: 2, 4, 6, 8, 10 tai 12

1. välikoe:

1. a) Olkoot $a, b > 0$ positiivisia reaalilukuja. Määritä kompleksilukujen $z = a+ai$ ja $w = b-bi$ polaariesitykset muodossa $re^{i\varphi}$.
b) Osoita, että kompleksiluvun $(a+ia)/(b-ib)$ reaaliosa on nolla.

2. Olkoon $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
a) Laske
$$\mathbf{w} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}$$
ja osoita, että $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$.
b) Sievennä $\mathbf{a} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

3. Määritä tasojen $x+y+z = 3$ ja $x-2y+3z = 2$ leikkaussuoran yhtälö muodossa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, missä $t \in \mathbf{R}$.

4. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
ja $\mathbf{c} = [2, 2, 1]^T$. Ratkaise yhtälöryhmä $B\mathbf{x} = A\mathbf{c}$.
Vihje: Tarkoitus on laskea aluksi $A\mathbf{c}$.

2. välikoe:

5. a) Laske determinantti
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$
b) Määritä 1. välikokeen tehtävän 4 matriisin A käänteismatriisi ja ratkaise sitä käyttämällä yhtälöryhmä $A\mathbf{y} = \mathbf{c}$, kun $\mathbf{c} = [2, 2, 1]^T$.

Käännä!

6. Olkoon A kuten 1. välikokeen tehtävässä 4.
a) Määritä matriisin A karakteristinen yhtälö $p(\lambda) = 0$.
b) Osoita, että luku $\lambda = 1$ on matriisin A ominaisarvo ja määritä sitä vastaava ominaisvektori.

7. Määritä raja-arvot

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + \sin(x)}{x^2+1} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}.$$

8. Määritä ellipsin $x^2 + 4y^2 = 5$ tangentin yhtälö pisteessä $(1, 1)$.

3. välikoe:

9. a) Selitä, miten saadaan Newtonin menetelmän palautuskaava funktion nollakohdan numeerisen likiarvon määrittämiseksi. Kuvio ja muutaman rivin laskut riittävät selitykseen.
b) Esitä hyperbolisten funktioiden $\sinh x$, $\cosh x$ määritelmät ja laske niiden sekä funktion

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

derivaatat.

10. Määritä lausekkeen $e^x \sin(x)$ maksimi ja minimi välillä $x \in [-\pi, \pi]$.

11. Moottoriveneen vauhti $v = v(t)$ mitataan 10 sekunnin välein aikavälillä $t \in [0, 60\,\mathrm{s}]$, jolloin saadaan $v = 15, 20, 20, 25, 20, 25, 30$ km/h. Arvioi veneen kulkemaa matkaa eli integraalia

$$\int_0^{60\,\mathrm{s}} v(t)\,dt$$

käyttämällä molempia alla mainittuihin kaavoihin liittyviä numeerisia integroimismenetelmiä. (Huom: km/h $= 1000/60^2$ m/s)

12. a) Määritä integraalifunktio

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+2)}\,dx.$$

b) Laske integraali

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx$$

sijoittamalla aluksi $x = t^2$.

Lisätietoja: $h = \Delta x =$ askelpituus, integraalilla $\int_a^b f(x)\,dx$ approksimaatiot

$$\begin{aligned} T_n &= h(f(x_0)/2 + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)/2) \text{ ja} \\ S_n &= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)). \end{aligned}$$

Käännä!