

## Tentti

- Olko  $X_1, X_2, \dots$  riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia kertymäfunktioilla  $F$  siten, että  $F(x) = 1 - e^{-x}$  kun  $x > 0$ . Selvitä jonon  $(M_n - d_n)/c_n$  rajajakauma, missä  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ ,  $c_n = 1$  ja  $d_n = \ln n$ . (Vihje: Huomaa, että  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + s/n)^n = e^s$ .)
- Olko  $X_1, X_2, \dots$  riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia kertymäfunktioilla  $F$ , ja merkitään niiden juoksevaa maksimia symbolilla  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ . Mitä voit sanoa rajarvosta  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ ? Onko raja-arvo olemassa?
- Olko  $X_1, \dots, X_n$  riippumattomia standardin yleistetyn ääriarvojakauman  $H_\xi$  mukaan jakautuneita satunnaismuuttujia, missä  $\xi > 0$ .
  - Näytä, että  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  noudattaa yleistettyä ääriarvojakaumaa.
  - Määritä vakiot  $\mu$ ,  $\sigma$  ja  $\alpha$  siten, että  $M_n$  ja  $\mu + \sigma Z_\alpha$  ovat samoin jakautuneita, missä  $Z_\alpha$  noudattaa standardia Fréchet-jakaumaa muotoparametrilla  $\alpha$ .
- Taulukossa 2 esitetään  $n = 3$  havaintoa vuosittaisista maksimilämpötiloista kuvitellussa maassa nimeltä Extremistan.
  - Laske havaittujen lämpötilojen empiirinen kertymäfunktio  $F_n$ .
  - Oletetaan, että tulevaisuuden vuosittaiset maksimilämpötilat  $X_1, X_2, \dots$  ovat riippumattomia kertymäfunktioilla  $F_n$ , ja merkitään  $L(u) = \min\{i \geq 1 : X_i > u\}$ . Laske todennäköisyys  $P(L(u) = 3)$  arvolle  $u = 50$ .
  - Laske paluuaika  $E L(u)$  arvolle  $u = 99$ .

vuosi	°C
2006	1
2007	1
2008	100

Table 2: Vuosittaiset maksimilämpötilat Extremistanissa välillä 2006–2008.

- Selitä, miksi standardi Gumbel-jakauma on tärkeä ääriarvojen tilastotieteessä.
  - Anna esimerkki todennäköisyysjakaumasta, joka kuuluu Gumbel-jakauman maksimaaliseen atraktiojoukkoon.
  - Anna esimerkki todennäköisyysjakaumasta, joka ei kuulu Gumbel-jakauman maksimaaliseen atraktiojoukkoon.

### Kaavoja

Standardit ääriarvojakaumafunktiot:

- $\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha})$ ,  $x > 0$ ,
- $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$ ,
- $\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^\alpha)$ ,  $x \leq 0$ .

Standardi yleistetty Pareto-jakaumafunktio:

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-1/\xi}, & x \geq 0, \quad \xi > 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0, \quad \xi = 0, \\ 1 - (1 + \xi x)^{-1/\xi}, & 0 \leq x \leq -1/\xi, \quad \xi < 0. \end{cases}$$

Standardi yleistetty ääriarvojakaumafunktio:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \xi x\right)^{-1/\xi}\right\}, & 1 + \xi x > 0, \quad \xi \neq 0, \\ \exp\left\{-e^{-x}\right\}, & \xi = 0. \end{cases}$$