

# Tik-106.4100 Algoritmien suunnittelu ja analyysi, syksy 2009

Tentti, 6.2.2010

Kirjoita jokaisen palauttamasi paperin yläreunaan selvästi "T-106.4100 Algoritmien suunnittelu ja analyysi, 6.2.2010", nimesi, opiskelijanumerosi ja koulutusohjelmasi sekä palauttamiesi paperien kokonaismäärä.

1. a) (3p) Ratkaise seuraava rekursioyhtälö, kun  $n$  on kolmen potenssi. Anna täsmällinen ratkaisu (suuruusluokka ei riitä).

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 1 \\ 2T(n/3) + 3n & \text{kun } n > 1 \end{cases}$$

- b) (3p) Arvaa hyvä ratkaisu seuraavalle palautuskaavalle ja todista ratkaisusi oikeaksi induktiolla ( $c_1$  ja  $c_2$  ovat vakioita ja  $n$  on neljän potenssi).

$$T(n) \leq \begin{cases} c_1, & \text{kun } n = 1 \\ 4T(n/4) + c_2n & \text{kun } n > 1 \end{cases}$$

2. a) (2 p) Miksi Union-Find-rakenteissa pyritään siihen, että yhtä joukkoa kuvaava puurakenne on mahdollisimman matala? Selitä asia muutamalla lauseella.
- b) (1 p) Miten tähän tavoitteeseen pyritään Find-operaation suorittamisen yhteydessä (mainitse vain yksi tapa)? Esitä kuvan avulla esimerkki tällaisesta Find-operaatiosta.
- c) (3 p) Selitä, miten minimin poisto tapahtuu toisaalta binomikeosta ja toisaalta Fibonacci-keosta. Mitkä ovat operaation **pahimman** tapauksen aikavaativuudet näissä rakenteissa? Perustele aikavaativuustulokset lyhyesti.
3. a) (2p) Selitä lyhyesti pyyhkäisyviiva-algoritmien (engl. sweeping) periaate.
- b) (2p) Selitä lyhyesti branch-and-bound -menetelmän periaate.
- c) (1p) Millaisten ongelmien ratkaisuihin branch-and-bound -menetelmää voi ja kannattaa käyttää?
- d) (1p) Mitä voidaan sanoa branch-and-bound -menetelmää käyttävän algoritmin aikavaativuudesta?
4. a) (1p) Binääriluku on tallennettu taulukkoon, yksi bitti kuhunkin taulukon alkioon. Lukuun kohdistetaan jono increment-operaatioita, joista kukin kasvattaa lukua yhdellä. Suunnittele algoritmi, joka toteuttaa increment-operaation ja vaatii pahimmassa tapauksessa ajan  $O(k)$ , missä  $k$  on luvun ykkösbittien määrä. Taulukon kokoa ei muuteta operaatioiden aikana, vaan binääriluvulla on jokin ennalta määrätty maksimiarvo, jonka saavuttamisen jälkeen binääriluku jälleen nollautuu. Taulukon yhden alkion arvon tutkimiseen tai vaihtamiseen kuluu vakioaika.
- b) (5p) Mikä on koko operaatiojonon aikavaatimus, jos alussa nollan sisältävään taulukkoon kohdistetaan  $n$  increment-operaatiota? Perustele vastauksesi käyttämällä tasoitettua vaativuusanalyysin (amortized analysis) pankkitili- eli potentiaalimenetelmää.
5. (6p.) Tarkastellaan suunnattua verkkoa  $G = (V, E)$ . Kirjoita psedokoodi algoritmille, joka tutkii, sisältääkö verkko  $G$  syklin. Algoritmin aikavaatimuksen tulee olla  $O(|V| + |E|)$ . Algoritmin ei tarvitse tulostaa sykliin kuuluvia solmuja. Riittää, että algoritmi kertoo, onko verkossa vähintään yksi sykli. Vinkki: vain takautuvat kaaret voivat aiheuttaa verkkoon syklejä.