

1. Sähkömagneettisen aaltoliikkeen tyhjiökentille pätee $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$; $-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$.

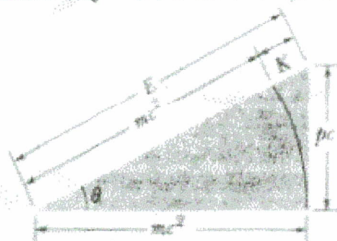
a) Johda kentille E ja B aaltoyhtälö eli toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (sekä ajan että paikan suhteen). Mitkä ovat kenttien vaihenopeudet? b) Osoita, että Coulombin lain CL dielektrisyysverrannollisuuskerroin $k_0 = 1/(4\pi \epsilon_0)$ on $k_0 = 10^{-7} \text{ c}^2 \approx 9 \cdot 10^9$. Laske k_0 :n laatu faradien avulla lähtien CL:n sähkökentän laadusta V/m. c) Osoita, että kummankin aaltoyhtälön ratkaisun paikka-aika-riippuvuus voi olla harmoninen aalto $\sin(kx - \omega t)$, missä $\omega/k = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. d) Tyhjiön sähkömagneettisessa aallossa kenttäamplitudeille pätee yhtälö $E_m = cB_m$. Valon nopeuden c suuruudesta johtuen E_m :n rinnalla B_m on lukuarvoltaan pieni ja voisi kuvitella, että sähkökenttään \vec{E} liittyvä energiatiheys $\epsilon_0 \vec{E}^2 / 2$ olisi suurempi kuin magneettikenttään \vec{B} liittyvä energiatiheys $\vec{B}^2 / (2\mu_0)$. Osoita, että energiatihetydet ovat kuitenkin täsmälleen yhtä suuret.

2. Insinööri IN lähtee Maasta ja matkustaa aluksellaan A vakiovauhdilla 0,96c (c on valon nopeus) kohti kiintotähteä K, joka on 168 valovuoden päässä. Ohittaessaan K:n IN lähettää valosignaalin, joka saapuu Maahan maahavaitsijan MH:n hetkellä T (IN:n lähtöhetkestä mitattuna). Laske a) A:n Lorentzin kerroin ja b) A:sta havaittuna K:n etäisyys MH:sta. Kuinka kauan IN:n matka kestää c) MH:n mielestä ja d) IN:n mielestä? e) Mikä on A:sta havaittuna A:n nopeus (MH:n suhteen)? f) Laske signaalin saapumishetki T.

Kuva 2 $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma(t - vx/c^2)$, $\Delta t = \gamma \Delta t_0$, $L = L_0 / \gamma$, $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$

3. Massaltaan tuntemattoman hiukkasen H varaus on negatiivinen, nopeus on 0,8c (c on valon nopeus) ja liikemäärä on $681 \frac{1}{3} \text{ keV}/c$. a) Osoita perustellen ja laskien, että H on elektroni. Laske H:n b) kokonaisenergia, c) liike-energia ja d) (de Broglie) aallonpituus (nanometreissä, 10^{-9} m). e) H törmää ja tarttuu liikkumattomaan suureen seinään. Paljonko seinän massa kasvaa yksiköissä m_e eli elektronin massan $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$ avulla lausuttuna?

Kuva 3



Kuva 4, 5 $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(x)] \psi = 0$

Hiukkanen, jonka massa on m, kokonaisenergia E ja liike-energia K, etenee potentiaalienergiassa U_0 x-akselin positiiviseen suuntaan (oikealle) tapauksissa a) $U_0 = 0$, b) $0 < U_0 < E$, c) $0 < E < U_0$. Kirjoita probleemien ajasta riippumattoman (stationaarisen) Schrödingerin yhtälön SY ratkaisu ja osoita, että SY toteutuu aaltoluvuilla

a) $k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mK}$, b) $k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U_0)}$, c) $k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U_0 - E)}{h^2}}$

5. Kvanttimekaaninen hiukkanen (massa on m) liikkuu x-akselilla laatikossa (syvässä potentiaalienergiakuopassa), jonka leveys on L ($U = 0$ välillä $0 < x < L$, muualla $U = \infty$). a) Perustele, miksi voidaan sanoa, että kuopan seinät ovat "kovia". b) Mikä on probleeman tilanfunktion ψ laatu (SI-järjestelmässä)? c) Osoita, että Hamiltonin (energia)operaattorin ominaisfunktioit ovat probleeman ratkaisuja muodossa $u = A \sin(kx)$. d) Laske ominaisfunktion $u = u_n(x)$ riippuvuus kvanttiluvusta n ja kuopan leveydestä L. e) Osoita, että tilassa $\psi = u_n$ olevan hiukkasen energia on muotoa $n^2 \cdot E_1$, missä E_1 on perustilan (kvanttiluku n = 1) energia. Laske E_1 L:n avulla. f) Laske n:n ja L:n avulla hiukkasen edestakaisen liikkeen nopeus (neliöllinen keskimääräinen (rms) nopeus).

$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 10^{-7} \cdot \text{c}^2 = 8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 511 \text{ keV}/c^2$, $m_p = m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV}/c^2$, $h = 2\pi\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}/c$, $1 \text{ la (ly) (valovuosi)} = c \cdot 1 \text{ a (1a on vuosi)} = 9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}$.