Aalto yliopiston teknillinen korkeakoulu Gripenberg/Siljander
Mat-1.1040 L4
1. välikoe 23.2.2010

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskin (yo-kirjoituksissa hyväksytty) on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Olkoon $f(t) = \min\{t, 1-t\}$, $t \in [0,1]$. Kun $n \geq 1$ niin f:n Fourier-kertoimet ovat $\hat{f}(n) = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2}$.

(a) Päättele ja/tai laske mitä Fourier-kertoimet $\hat{f}(n)$ ovat kun $n \leq 0$.
(b) Laske näiden tulosten avulla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ (tai selitä ainakin miten laskisit tämän sarjan summan jos olisit ratkaissut (a)-kohdan).

2. Oleta tunnetuksi, että jos $g \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{g}(\omega) = 0$ kun $|\omega| \geq \frac{1}{2}$ niin

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}.$$

(a) Osoita, että jos $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{f}(\omega) = 0$ kun $|\omega| \geq \frac{1}{2a}$ missä $a > 0$ niin

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na) \frac{\sin(\frac{\pi}{a}(t-na))}{\frac{\pi}{a}(t-na)}.$$

(b) Miksi pätee (a)-kohdan oletuksilla, että f on jatkuva (tai ainakin, että $f(t) = F(t)$ melkein kaikkialla missä F on jatkuva)?

3. Oletetaan, että f on jatkuva ja jaksollinen funktio (jonka jakso on 1) ja että sen arvot $f(\frac{k}{N})$ tunnetaan pisteissä $\frac{k}{N}$ kun $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Esitä jokin järkevä ja tehokas tapa funktion f Fourier-kertoimien approksimaatioiden laskemiseksi.

4.

(a) Selitä miten harmonisten funktioiden maksimiperiaatteesta seuraa, että jos $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on avoin ja rajoitettu niin on olemassa korkeintaan yksi funktio $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ siten että u on harmoninen joukossa Ω ja $u = g$ reunalla $\partial\Omega$ missä g on annettu funktio.
(b) Oletetaan, että u on harmoninen $\mathbb{R}^d$:ssä ja on olemassa positiiviset vakiot vakiot α ja β sekä $\gamma \in (0,1)$ siten, että $|u(\mathbf{x})| \leq \alpha + \beta|\mathbf{x}|^\gamma$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Seuraako tästä, että u on vakio? Perustele!

Toiselta sivulta löytyy pari (satunnaisesti valittua?) kaavaa!

$$F_m(t) = \frac{1}{m}\left(\frac{\sin(m\pi t)}{\sin(\pi t)}\right)^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{r^2 - |\mathbf{x}|^2}{ra(S^{d-1})}\int_{|\mathbf{y}|=r}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^d}g(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}), \quad |\mathbf{x}| < r,$$

$$u(\mathbf{x}, y) = \frac{2}{a(S^{d-1})}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{y}{(|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2 + y^2)^{\frac{d}{2}}}g(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\mathbf{z}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad y > 0,$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$