Aalto yliopiston teknillinen korkeakoulu Gripenberg/Siljander
Mat-1.1040 L4
1. välikoe 23.2.2010

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskin (yo-kirjoituksissa hyväksytty) on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Olkoon $f(t) = \min\{t, 1-t\}$, $t \in [0,1]$. Kun $n \geq 1$ niin f:n Fourier-kertoimet ovat $\hat{f}(n) = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2}$.

(a) Päättele ja/tai laske mitä Fourier-kertoimet $\hat{f}(n)$ ovat kun $n \leq 0$.
(b) Laske näiden tulosten avulla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ (tai selitä ainakin miten laskisit tämän sarjan summan jos olisit ratkaissut (a)-kohdan).

Ratkaisu: (a)

$$\hat{f}(0) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \Big/_1^{1/2} \frac{t^2}{2} + \Big/_{1/2}^{1} (t - \tfrac{t^2}{2}) = \frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Kun $t \in [0, \frac{1}{2}]$ niin $f(t) = t$ ja kun $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ niin $f(t) = 1 - t$. Kun f jatketaan jaksolliseksi funktioksi niin $f(t) = 1 - (t-1) = -t = |t|$ kun $t \in [-\frac{1}{2}, 0]$, eli f on parillinen funktio. Tästä seuraa, että jos $n < 0$ niin

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n(-s)} f(-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ns} f(s)\,\mathrm{d}s = \hat{f}(-n) = \frac{(-1)^{-n} - 1}{2\pi^2(-n)^2} = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi^2 n^2}\end{aligned}$$

(b) Edellisestä kohdasta nähdään, että $\hat{f}(n) = -\frac{1}{\pi^2 n^2}$ jos n on pariton ja $\hat{f}(n) = 0$ jos n on parillinen ja $\neq 0$. Lisäksi pätee $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$. Näin ollen

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = |\hat{f}(0)|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(2n-1)|^2 = \frac{1}{16} + \frac{2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

Koska

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} t^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^2\,\mathrm{d}t = 2 \Big/_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} t^3 = \frac{1}{12},$$

niin kaavasta $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{2}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

---

2. Oleta tunnetuksi, että jos $g \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{g}(\omega) = 0$ kun $|\omega| \geq \frac{1}{2}$ niin

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}.$$

(a) Osoita, että jos $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{f}(\omega) = 0$ kun $|\omega| \geq \frac{1}{2a}$ missä $a > 0$ niin

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na) \frac{\sin(\frac{\pi}{a}(t-na))}{\frac{\pi}{a}(t-na)}.$$

(b) Miksi pätee (a)-kohdan oletuksilla, että f on jatkuva (tai ainakin, että $f(t) = F(t)$ melkein kaikkialla missä F on jatkuva)?

Ratkaisu: Määritellään $g(t) = f(at)$. Silloin $g \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$. Nyt $|\frac{\omega}{a}| \geq \frac{1}{2a}$ täsmälleen silloin kun $|\omega| \geq \frac{1}{2}$ joten $\hat{g}(\omega) = 0$ kun $|\omega| \geq \frac{1}{2}$. Jos nyt oletettuun kaavaan g:n paikalle sijoitetaan $f(at)$ saadaan tulokseksi

$$f(at) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(an) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}.$$

ja jos tässä kaavassa valitaan $t = \frac{\tau}{a}$ saadaan

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(an) \frac{\sin(\pi(\frac{\tau}{a}-n))}{\pi(\frac{\tau}{a}-n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(an) \frac{\sin(\frac{\pi}{a}(\tau-na))}{\frac{\pi}{a}(\tau-na)},$$

ja väite on todistettu.

(b) Jos $f \in L^1(\mathbb{R})$ niin $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ja kun oletetaan, että $\hat{f}(\omega) = 0$ kun $|\omega| \geq \frac{1}{2a}$ niin $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ja koska f on käänteiskaavan nojalla funktion $\hat{f}(-\omega)$ Fourier-muunnos niin f on jatkuva.

---

3. Oletetaan, että f on jatkuva ja jaksollinen funktio (jonka jakso on 1) ja että sen arvot $f(\frac{k}{N})$ tunnetaan pisteissä $\frac{k}{N}$ kun $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Esitä jokin järkevä ja tehokas tapa funktion f Fourier-kertoimien approksimaatioden laskemiseksi.

Ratkaisu: Valitaan jokin sopiva funktio $p_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ siten, että $p_N(t+1) = p_N(t)$ ja

$$p_N(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t = \frac{k}{N}, k = 1, 2, \ldots, N-1, \end{cases}$$

ja määritellään sen avulla

$$g(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\tfrac{k}{N}\right) p_N\left(t - \tfrac{k}{N}\right).$$

Tämä funktio on jaksollinen jaksolla 1 ja jos $t = \frac{j}{N}$ missä $0 \le j \le N-1$ niin $p_N\left(t - \frac{k}{N}\right) = 1$ kun $k = j$ ja 0 muilla arvoilla $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ ja siitä seuraa, että $g(\frac{j}{N}) = f(\frac{j}{N})$. Määirtellään $\mathbf{F}(k) = f(\frac{k}{N})$ ja lasketaan funktion g Fourier-kertoimet jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\hat{g}(m) &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mt} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{F}(k) p_N\left(t - \tfrac{k}{N}\right)\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mk}{N}} \mathbf{F}(k) \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi m(t-\frac{k}{N})} p_N\left(t - \tfrac{k}{N}\right)\, \mathrm{d}t = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mk}{N}} \mathbf{F}(k) \int_{-\frac{k}{N}}^{1-\frac{k}{N}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mt} p_N(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi mk}{N}} \mathbf{F}(k) \widehat{p_N}(m) = \hat{\mathbf{F}}(m) \widehat{p_N}(m).
\end{aligned}$$

4.

(a) Selitä miten harmonisten funktioiden maksimiperiaatteesta seuraa, että jos $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on avoin ja rajoitettu niin on olemassa korkeintaan yksi funktio $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ siten että u on harmoninen joukossa Ω ja $u = g$ reunalla $\partial\Omega$ missä g on annettu funktio.

(b) Oletetaan, että u on harmoninen $\mathbb{R}^d$:ssä ja on olemassa positiiviset vakiot vakiot α ja β sekä $\gamma \in (0,1)$ siten, että $|u(\mathbf{x})| \le \alpha + \beta|\mathbf{x}|^\gamma$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Seuraako tästä, että u on vakio? Perustele!

Ratkaisu: Oletetaan, että olisi olemassa kaksi funktiota u_1 ja u_2, jotka toteuttava annetut ehdot ja on osoitettava, että $u_1 = u_2$. Erotus $v = v_1 - u_2$ on myös harmoninen joukossa Ω, jatkuva sen sulkeumassa $\overline{\Omega}$ ja $v = g - g = 0$ reunalla $\partial\Omega$. Kun maksimiperiaatetta sovelletaan funktioon v saadaan että $v(\mathbf{x}) \le \max_{\mathbf{y}\in\partial\Omega} v(\mathbf{y}) = 0$ kun $\mathbf{x} \in \Omega$ ja kun se sovelletaan funktion $-v$ (joka tietenkin toteuttaa samat ehdot) niin todetaan, että $-v(\mathbf{x}) \le \max_{\mathbf{y}\in\partial\Omega}(-v(\mathbf{y})) = 0$ kun $\mathbf{x} \in \Omega$ ja tästä seuraa, että $v(\mathbf{x}) = 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \Omega$ ja $u_1 = u_2$.

(b) Olkoon $|\mathbf{x}| = r < R$ ja $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \alpha + \beta R^\gamma$. Silloin v on harmoninen $\mathbb{R}^d$:ssä ja $v(\mathbf{y}) \ge 0$ kun $|\mathbf{y}| \le R$. Poissonin kaavan mukaan

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{Ra(S^{d-1})} \int_{|\mathbf{y}|=R} \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^d} v(\mathbf{y})\, \mathrm{d}S(\mathbf{y}),$$

ja keskiarvo-ominaisuuden nojalla

$$v(\mathbf{0}) = \frac{1}{R^{d-1}a(S^{d-1})}\int_{|\mathbf{y}|=R} v(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}).$$

Koska $v(\mathbf{y}) \geq 0$ ja $R - r \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R + r$ kun $|\mathbf{y}| = R$ niin saadaan ensin epäyhtälö

$$\frac{(R-r)R^{d-2}}{(R+r)^{d-1}}v(\mathbf{0}) \leq v(\mathbf{x}) \leq \frac{(R+r)R^{d-2}}{(R-r)^{d-1}}v(\mathbf{0}),$$

jolloin funktion v määritelmästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\left(\frac{(R-r)R^{d-2}}{(R+r)^{d-1}} - 1\right)\big(u(\mathbf{0}) + \alpha + \beta R^{\gamma}\big) &\leq u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{0}) \\ &\leq \left(\frac{(R+r)R^{d-2}}{(R-r)^{d-1}} - 1\right)\big(u(\mathbf{0}) + \alpha + \beta R^{\gamma}\big).\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{(R-r)R^{d-2}}{(R+r)^{d-1}} - 1\right) \\ &\quad = \lim_{R\to\infty} R\frac{R^{d-1} - rR^{d-2} - R^{d-1} - \sum_{j=1}^{d-1}\binom{d-1}{j}R^{d-1-j}r^{j}}{(R-r)^{d-1}} = -dr,\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{(R+r)R^{d-2}}{(R-r)^{d-1}} - 1\right) \\ &\quad = \lim_{R\to\infty} R\frac{R^{d-1} + rR^{d-2} - R^{d-1} - \sum_{j=1}^{d-1}\binom{d-1}{j}R^{d-1-j}(-r)^{j}}{(R-r)^{d-1}} = dr.\end{aligned}$$

Koska $\gamma \in (0,1)$ niin tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty}\left(\frac{(R-r)R^{d-2}}{(R+r)^{d-1}} - 1\right)\big(u(\mathbf{0}) + \alpha + \beta R^{\gamma}\big) \\ &\quad = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{(R+r)R^{d-2}}{(R-r)^{d-1}} - 1\right)\big(u(\mathbf{0}) + \alpha + \beta R^{\gamma}\big) = 0,\end{aligned}$$

josta seuraa, että $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{0})$ ja koska $\mathbf{x}$ oli mielivaltainen niin nähdään, että u on vakio.
