Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Kinnunen, Niemi

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4, kevät 2009

Loppukoe 11.1.2010

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodikohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

1. Oletetaan, että $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio ja $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $g(t) = e^{it} f(t)$. Näytä, että Fourierin kertoimille pätee

   (a) $\widehat{g}(j) = \widehat{f}(j-1)$

   ja

   (b) $|\widehat{f}(j)| \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$

   kaikilla $j \in \mathbb{Z}$.

2. Laske funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{kun} \quad x > 0, \\ 0, & \text{kun} \quad x \leq 0, \end{cases}$$
   Fourierin muunnos.

3. Oletetaan, että $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ on positiivinen ja harmoninen funktio yksikköpallossa $B(0,1)$. Silloin funktiolle u pätee Poissonin esityskaava
$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} f(y)\, dS(y),$$
   missä $\alpha(n)$ on yksikköpallon tilavuus. Näytä Poissonin kaavaa käyttäen, että
$$\frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}} u(0)$$
   kaikilla $x \in B(0,1)$.

4. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu avoin joukko, $0 < T < \infty$,
$$\Omega_T = \Omega \times (0,T) \quad \text{ja} \quad \Gamma_T = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{t=0\})$$
   ja että $u, v \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ ovat lämpöyhtälön
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \tag{1}$$
   ratkaisuja joukossa Ω_T.

   (a) Muotoile vertailuperiaate ratkaisuille u ja v.

   (b) Olkoon $\varepsilon > 0$. Todista vertailuperiaatteen avulla, että jos $|u-v| \leq \varepsilon$ parabolisella reunalla Γ_T, niin $|u-v| \leq \varepsilon$ joukossa Ω_T.

5. Ratkaise yhtälö
$$y(t) = \int_0^{\pi} \sin(t+s) y(s)\, ds + 1$$
   Vihje: ydin $k(t,s) = \sin(t+s)$ on degeneroitunut.

6. Kun yksidimensioinen lämpöyhtälö $u_t = u_{xx}$ on diskretoitu paikkamuuttujan suhteen, on päädytty tavalliseen differentiaaliyhtälöön $\boldsymbol{u}_h'(t) = \boldsymbol{\Delta}_h \boldsymbol{u}_h(t)$, missä $\boldsymbol{\Delta}_h$:n ominaisarvojen tiedetään olevan välillä $(-4/h^2, 0)$.

   (a) Esitä jokin yksiaskelmenetelmä tämän diskretoimiseksi ajan suhteen valitsemalla aika-askel $\delta > 0$ ja merkitsemällä $\boldsymbol{u}_h^k$:lla $\boldsymbol{u}_h(k\delta)$:n approksimaatiota, missä $k = 0, 1, 2, \ldots$

   (b) Millä aika-askeleen $\delta > 0$ arvoilla menetelmäsi on stabiili eli tuottaa rajoitettuja ratkaisuja, joille $\boldsymbol{u}_h^k \to \boldsymbol{0}$, kun $k \to \infty$? Perustele.

   Vihje: $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{B}^k = \boldsymbol{0} \iff |\lambda| < 1$ kaikilla $\boldsymbol{B}$:n ominaisarvoilla λ.