

1. välikoe 23.2.2010

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!

Laskin (yo-kirjoituksissa hyväksyty) on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Olkoon $f(t) = \min\{t, 1-t\}$, $t \in [0, 1]$. Kun $n \geq 1$ niin f :n Fourier-kertoimet ovat $\hat{f}(n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi^2 n^2}$.

(a) Päätele ja/tai laske mitä Fourier-kertoimet $\hat{f}(n)$ ovat kun $n \leq 0$.

(b) Laske näiden tulosten avulla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ (tai selitä ainakin miten laskisit tämän sarjan summan jos olisit ratkaissut (a)-kohdan).

2. Oleta tunnetuksi, että jos $g \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{g}(\omega) = 0$ kun $|\omega| \geq \frac{1}{2}$ niin

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}.$$

(a) Osoita, että jos $f \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{f}(\omega) = 0$ kun $|\omega| \geq \frac{1}{2a}$ missä $a > 0$ niin

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(t-na)\right)}{\frac{\pi}{a}(t-na)}.$$

(b) Miksi pätee (a)-kohdan oletuksilla, että f on jatkuva (tai ainakin, että $f(t) = F(t)$ melkein kaikkialla missä F on jatkuva)?

3. Oletetaan, että f on jatkuva ja jaksollinen funktio (jonka jakso on 1) ja että sen arvot $f\left(\frac{k}{N}\right)$ tunnetaan pisteissä $\frac{k}{N}$ kun $k = 0, 1, \dots, N-1$. Esitä jokin järkevä ja tehokas tapa funktion f Fourier-kertoimien approksimaatioiden laskemiseksi.

4.

(a) Selitä miten harmonisten funktioiden maksimiperiaatteesta seuraa, että jos $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on avoin ja rajoitettu niin on olemassa korkeintaan yksi funktio $u \in C(\overline{\Omega})$ siten että u on harmoninen joukossa Ω ja $u = g$ reunalla $\partial\Omega$ missä g on annettu funktio.

(b) Oletetaan, että u on harmoninen \mathbb{R}^d :ssä ja on olemassa positiiviset vakiot α ja β sekä $\gamma \in (0, 1)$ siten, että $|u(\mathbf{x})| \leq \alpha + \beta|\mathbf{x}|^\gamma$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Seuraako tästä, että u on vakio? Perustelee!

Toiselta sivulta löytyy pari (satunnaisesti valittua?) kaavaa!

$$F_m(t) = \frac{1}{m} \left(\frac{\sin(m\pi t)}{\sin(\pi t)} \right)^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{r^2 - |\mathbf{x}|^2}{ra(S^{d-1})} \int_{|\mathbf{y}|=r} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d} g(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}), \quad |\mathbf{x}| < r,$$

$$u(\mathbf{x}, y) = \frac{2}{a(S^{d-1})} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{y}{(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2 + y^2)^{\frac{d}{2}}} g(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad y > 0,$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt.$$