

Funktioalaskin

Kaavakokoelma:

61
(Maa-6.3230)Olkoon pallokolmion ABC sivut a, b, c ja sivujen vastakkaiset kulmat α, β, γ . Silloin:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Litistysuhde ja eksentrisyys (a, b maa-ellipsoidin pitkä ja lyhyt akselipuolikas):

$$f = \frac{a-b}{a}, e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Leveysasteet: maantieteellinen φ , geosentrinen ϕ , redukoitu β :

$$\tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \tan \phi = \frac{a}{b} \tan \beta$$

1. Pallokolmio

Kolme pistettä yksikkösäteisen pallon pinnalla: C on pohjoisnapa, A on (φ_A, λ_A) jossa $\lambda_A = 0$, B on (φ_B, λ_B) .

- (a) Kirjoita pisteiden A, B ja C suuntavektorit (yksikkövektorit) $\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B$ ja \mathbf{e}_C .
 (b) Laske pisteiden A ja B suuntavektoreiden *pistetulo* $\langle \mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B \rangle = \|\mathbf{e}_A\| \cdot \|\mathbf{e}_B\| \cdot \cos(\angle \mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B)$ ja näytä toteeksi pallokolmion kosinissäntö

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Tässä α, β, γ ovat pisteiden A, B, C muodostaman pallokolmion kulmat pallon pinnalla ja a, b, c niiden vastakkaiset sivut (tee piirros, se auttaa!).

2. Pallotrigonometria

Laske Helsingin ($\varphi = 60^\circ, \lambda = 25^\circ$) ja Moskovan ($\varphi = 56^\circ, \lambda = 38^\circ$) välinen etäisyys kulmayksiköissä ($^\circ$). Pallo.

3. Vertausellipsoidi

Annettuna $a = 6378388$ m, $f = 1/297$ (Kansainvälinen ellipsoidi).

- (a) Laske e^2 ja b .
 (b) Jos $\varphi = 60^\circ$, laske β .

4. Pintateoria

Annettuna puolipallon muotoisen, H -korkuisen mäen pinta ja sen parametrisointi (h, A) :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{H^2 - h^2} \cos A \\ \sqrt{H^2 - h^2} \sin A \\ h \end{bmatrix}$$

Laske tangenttivektoripari

$$\mathbf{x}_h = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial h} \text{ ja } \mathbf{x}_A = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial A}$$

ja metrinen tensori

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{hh} & g_{Ah} \\ g_{hA} & g_{AA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_h \cdot \mathbf{x}_h & \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_h \\ \mathbf{x}_h \cdot \mathbf{x}_A & \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_A \end{bmatrix}$$

5. Karttaprojektiot

Mercator-projektion projektiokaavat ovat pallon pinnalla

$$\begin{aligned}x &= \lambda, \\y &= \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),\end{aligned}$$

jossa (φ, λ) ovat maantieteelliset koordinaatit ja (x, y) karttakoordinaatit.

Matka-alkio Maan pinnalla on $dS^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$ ja karttatasossa $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Laske mittakaavat m_1 ja m_2 länsi-itä- ja etelä-pohjoissuunnassa.

Pisteytys:

Kysymys	1 a b	2	3 a b	4	5	
Pisteet	5 2 3	5	5 2 3	5	5	25

Pisteet	10	12	16	19	23
Arvosana	1	2	3	4	5