

## Funktiolaskin

### Kaavakokoelma:

Litistyssuhde ja eksentrisyys ( $a, b$  maa-ellipsoidin pitkä ja lyhyt akselipuolikas):

$$f = \frac{a-b}{a}, e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Leveysasteet: maantieteellinen  $\varphi$ , geosentrinen  $\phi$ , redukoitu  $\beta$ :

$$\tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \tan \phi = \frac{a}{b} \tan \beta.$$

### 1. Pallokolmio

Kolme pistettä:  $N$  on pohjoisnapa,  $A$  on ( $\varphi = 0, \lambda = 0$ ),  $B$  on ( $\varphi = 0, \lambda = 90^\circ$ ).

- (a) Laske kolmion *pinta-ala* (*vihje*: montako sellaisia kolmioita mahtuu koko pallon pintaan?)
- (b) Laske kolmion palloylijäämä kaavan  $\varepsilon = SR^{-2}$  avulla, jossa  $S$  on pinta-ala ja  $R$  on maa-pallon säde.
- (c) Laske kolmion palloylijäämä suoraan geometrisesti. Mitkä ovat kulmien  $\angle N, \angle A, \angle B$  arvot?

### 2. Pallotrigonometria

Laske Helsingin ( $\varphi = 60^\circ, \lambda = 25^\circ$ ) ja Moskovon ( $\varphi = 56^\circ, \lambda = 38^\circ$ ) välinen etäisyys kulmayksiköissä ( $^\circ$ ). Pallo.

### 3. Vertausellipsoidi

Annettuna  $a = 6378388$  m,  $f = 1/297$  (Kansainvälinen ellipsoidi).

- (a) Laske  $e^2$  ja  $b$ .
- (b) Jos  $\varphi = 60^\circ$ , laske  $\beta$ .

### 4. Pintateoria

Annettuna puolipallon muotoisen,  $H$ -korkuisen mäen pinta ja sen parametrisointi ( $h, A$ ):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{H^2 - h^2} \cos A \\ \sqrt{H^2 - h^2} \sin A \\ h \end{bmatrix}.$$

Laske tangenttivektoripari

$$\mathbf{x}_h = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial h} \text{ ja } \mathbf{x}_A = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial A}$$

ja metrinen tensori

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{hh} & g_{Ah} \\ g_{hA} & g_{AA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_h \cdot \mathbf{x}_h & \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_h \\ \mathbf{x}_h \cdot \mathbf{x}_A & \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_A \end{bmatrix}.$$

### 5. Karttaprojektiot

Mercator-projektion projektiokaavat ovat pallon pinnalla

$$\begin{aligned} x &= \lambda, \\ y &= \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \end{aligned}$$

jossa  $(\varphi, \lambda)$  ovat maantieteelliset koordinaatit ja  $(x, y)$  karttakoordinaatit.

Matka-alkio Maan pinnalla on  $dS^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$  ja karttatasossa  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ .

Laske mittakaavat  $m_1$  ja  $m_2$  länsi-itä- ja etelä-pohjoissuunnassa.

**Pisteytys:**

|         |          |   |          |   |   |    |
|---------|----------|---|----------|---|---|----|
| Kysymys | 1<br>a b | 2 | 3<br>a b | 4 | 5 |    |
| Pisteet | 5<br>2 3 | 5 | 5<br>2 3 | 5 | 5 | 25 |

|          |    |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|----|
| Pisteet  | 10 | 12 | 16 | 19 | 23 |
| Arvosana | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |