

Funktiolaskin

Kaavakokoelma:

Olkoon pallokolmion ABC sivut a, b, c ja sivujen vastakkaiset kulmat α, β, γ . Silloin:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Litistysuhde ja eksentrisyys (a, b maa-ellipsoidin pitkä ja lyhyt akselipuolikas):

$$f = \frac{a-b}{a}, e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Leveysasteet: maantieteellinen φ , geosentrinen ϕ , redukoitu β :

$$\tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \tan \phi = \frac{a}{b} \tan \beta.$$

1. Pallokolmio

Kolme pistettä: N on pohjoisnapa, A on ($\varphi = 0, \lambda = 0$), B on ($\varphi = 0, \lambda = 90^\circ$).

- (a) Laske kolmion *pinta-ala* (*vihje*: montako sellaisia kolmioita mahtuu koko pallon pintaan?)
- (b) Laske kolmion palloylijäämä kaavan $\varepsilon = SR^{-2}$ avulla, jossa S on pinta-ala ja R on maapallon säde.
- (c) Laske kolmion palloylijäämä suoraan geometrisesti. Mitkä ovat kulmien $\angle N, \angle A, \angle B$ arvot?

2. Pallotrigonometria

Laske Helsingin ($\varphi = 60^\circ, \lambda = 25^\circ$) ja Tukholman ($\varphi = 59^\circ, \lambda = 18^\circ$) välinen etäisyys kulmayksiköissä ($^\circ$). Pallo.

3. Vertausellipsoidi

Annettuna $a = 6378137$ m, $f = 1/298.257222101$ (GRS80-ellipsoidi).

- (a) Laske e^2 ja b .
- (b) Jos $\varphi = 60^\circ$, laske β .

4. Pintateoria

Annettuna kartion pinta ja sen parametrisointi (s, λ) :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \sin \alpha \cos \lambda \\ s \sin \alpha \sin \lambda \\ s \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Tässä vakio α on kartion huipun puolikulma.

Laske tangenttivektoripari

$$\mathbf{x}_s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \text{ ja } \mathbf{x}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}$$

ja metrinen tensori

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{ss} & g_{s\lambda} \\ g_{s\lambda} & g_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \cdot \mathbf{x}_s & \mathbf{x}_\lambda \cdot \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_s \cdot \mathbf{x}_\lambda & \mathbf{x}_\lambda \cdot \mathbf{x}_\lambda \end{bmatrix}.$$

5. Karttaprojektiot

Isometrinen leveysaste on

$$\psi = \int_0^\varphi \frac{M(\varphi')}{p(\varphi')} d\varphi',$$

jossa M on mediaanikaarevuussäde ja kaavassa $p(\varphi) = N(\varphi) \cos \varphi$ on N poikittaiskaarevuussäde.

Oleta, että maapallo on pallo, eli sen molemmat kaarevuussäteet ovat samat, R . Anna yo. kaavan yksinkertaistettu versio.

Todista, että

$$\psi = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

on integraalin suljettu ratkaisu.

Pisteytys:

Kysymys	1 a b c	2	3 a b	4	5	
Pisteet	5 2 2 1	5	5 2 3	5	5	25

Pisteet	10	12	16	19	23
Arvosana	1	2	3	4	5