

Tentti: Matemaattinen geodesia 17.12.2011

Funktiolaskin

Kaavakokoelma:

Litistyssuhde ja eksentrisyys (a, b maa-ellipsoidin pitkä ja lyhyt akselipuolikas):

$$f = \frac{a-b}{a}, e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Leveysasteet: maantieteellinen φ , geosentrinen ϕ , redukoitu β :

$$\tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \tan \phi = \frac{a}{b} \tan \beta.$$

1. Koordinaatit ja muunnokset

Näytä, että rotaatiomatriisi

$$\begin{bmatrix} \cos \kappa \cos \omega & -\cos \kappa \sin \omega & -\sin \kappa \\ \sin \kappa \cos \omega & -\sin \kappa \sin \omega & \cos \kappa \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \end{bmatrix}$$

on *ortogonaalinen*.

2. Pallotrigonometria

Laske Helsingin ($\varphi = 60^\circ, \lambda = 25^\circ$) ja Moskovan ($\varphi = 56^\circ, \lambda = 38^\circ$) välinen etäisyys kulmayksiköissä ($^\circ$). Pallo.

3. Vertausellipsoidi

Annettuna $a = 6378388$ m, $f = 1/297$ (Kansainvälinen ellipsoidi).

(a) Laske e^2 ja b .

(b) Jos $\varphi = 60^\circ$, laske β .

4. Pintateoria

Annettuna kartion pinta ja sen parametrisointi (s, λ) :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \sin \alpha \cos \lambda \\ s \sin \alpha \sin \lambda \\ s \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Tässä vakio α on kartion huipun puolikulma.

Laske tangenttivektoripari

$$\mathbf{x}_s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \text{ ja } \mathbf{x}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}$$

ja metrin tensori

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{ss} & g_{s\lambda} \\ g_{s\lambda} & g_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \cdot \mathbf{x}_s & \mathbf{x}_\lambda \cdot \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_s \cdot \mathbf{x}_\lambda & \mathbf{x}_\lambda \cdot \mathbf{x}_\lambda \end{bmatrix}.$$

5. Karttaprojektiot

Isometrinen leveysaste on

$$\psi = \int_0^\varphi \frac{M(\varphi')}{p(\varphi')} d\varphi',$$

jossa M on mediaanikaarevuussäde ja kaavassa $p(\varphi) = N(\varphi) \cos \varphi$ on N poikittaiskaarevuussäde.

Oleta, että maapallo on pallo, eli sen molemmat kaarevuussäteet ovat samat, R . Anna yo. kaavan yksinkertaistettu versio.

Todista, että

$$\psi = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

on integraalin suljettu ratkaisu.

Pisteytys:

Kysymys	1	2	3 a b	4	5	
Pisteet	5	5	5 2 3	5	5	25

Pisteet	10	12	16	19	23
Arvosana	1	2	3	4	5