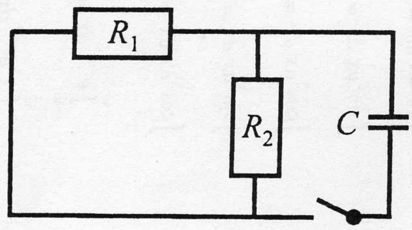
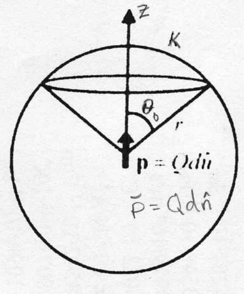
Merkitse jokaiseen vastauspaperiin nimi, opiskelijanumero, laitos ja kurssin koodi
Mainitse myös suoritko laskuharjoituksia keväällä 2010

1. Vastaa lyhyesti ja selkeästi seuraaviin kysymyksiin.
   a) Kirjoita Gaussin laki sähkökentälle integraalimuodossa ja tulkitse se fysikaalisesti. (1p)
   b) Millainen on ferromagneettisen aineen mikroskooppinen koostumus? Mitä sovelluksia tällaisella aineella on? (1p)
   c) Staattinen sähkökenttä on pyörteetön. Miten tämä kirjoitetaan matemaattisesti? Perustele huolella, että kaavasi kuvaa pyörteettömyyttä. (1p)
   d) Mitä sähkövuon tiheys ja magneettivuon tiheys kuvaavat? (1p)
   e) Virtasilmukka asetetaan homogeeniseen magneettikenttän. Selitä sanoin, kuvin ja kaavoin mitä tapahtuu. (1p)
   f) Varattu hiukkanen liikkuu sähkömagneettisessa kentässä. Minkälainen voima siihen kohdistuu? (1p)

2. Oheisen kuvan mukaisessa piirissä olevan kondensaattorin jännite on aluksi V_0. Kun kytkin suljetaan kondensaattori purkautuu. Osoita, että kaikki kondensaattorin energia muuttuu vastuksissa lämmöksi. (6p)



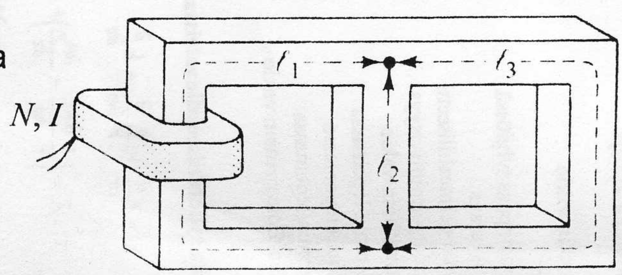
3. Stattisen sähköisen dipolin kanssa samankeskiseltä pallopinnalta on erotettu kalotti K, jonka reunaviivaetäisyys on r ja kulma akseliin nähden on θ_0 (ks. kuva). Johda kalotin kautta kulkevan sähkövuon Φ lauseke. (6p)



Vihje: dipolin kentän lauseke on muotoa: $\mathbf{E} = -\dfrac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon r^3} + \dfrac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon r^5}$

4. Ratkaise kaikki kohdat.
   a) Määritä magneettikentän voimakkuus a-säteisen virtasilmukan keskipisteessä. (2p)
   b) Johda sähkövuon määritelmästä lähtien lauseke pistevarauksen sähkökentälle. (2p)
   c) Pitkän tiiviisti kierretyn käämin kierrostiheys on n. Määritä magneettikentän voimakkuus käämin sisällä. (2p)

5. Käämille (virta I, N kierrosta) on asetettu oheisen kuvan mukainen sydän materiaalista, jonka permittiivisyys on μ. Sydämen poikkipinta-ala on kaikkialla sama (A) ja lisäksi pituuksille pätee $l_1 = l_3$. Määritä magneettikentän voimakkuus osuuksilla l_1, l_2, ja l_3. Voit olettaa, että magneettikenttä on vakio poikkipinta-alalla. (6p)



KÄÄNNÄ

Vakioiden arvoja

Planckin vakio	$h = 6.6261\cdot10^{-34}$ Js
$h/2\pi$	$\hbar = 1.0546\cdot10^{-34}$ Js
valon nopeus tyhjiössä	$c = 2.9979\cdot10^{8}$ m/s
alkeisvaraus	$e = 1.6022\cdot10^{-19}$ C
tyhjiön permeabiliteetti	$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ N/A^2
tyhjiön permittiivisyys	$\varepsilon_0 = 8.8542\cdot10^{-12}$ F/m
Boltzmannin vakio	$k = 1.3807\cdot10^{-23}$ J/K
elektronin lepomassa	$m_e = 9.1094\cdot10^{-31}$ kg
protonin lepomassa	$m_p = 1.6726\cdot10^{-27}$ kg
neutronin lepomassa	$m_n = 1.6749\cdot10^{-27}$ kg
Stefan-Boltzmannin vakio	$\sigma = 5.6705\cdot10^{-8}$ W/(m^{2}K^4)

Nabla sylinterikoordinaateissa

$$\vec\nabla = \hat r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec\nabla\times\vec A = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat\phi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\hat k$$

$$\vec\nabla\cdot\vec A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_r}{\partial z}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Nabla pallokoordinaateissa

$$\vec\nabla = \hat r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\vec\nabla\times\vec A = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\hat\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat\phi$$

$$\vec\nabla\cdot\vec A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

Integraaleja

$$\int\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int\cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$\int\sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int\cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int\sin^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax$$

$$\int\cos^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$

$$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$

$$\int x^2\sin ax\,dx = \frac{1}{a^3}(2\cos ax + 2ax\sin ax - a^2x^2\cos ax$$

$$\int x^2\cos ax\,dx = \frac{1}{a^3}(-2\sin ax + 2ax\cos ax + a^2x^2\sin$$

$$\int x^n\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x^n\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$$

$$\int x^n\cos ax\,dx = \frac{1}{a}x^n\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx$$

$$\int x\sin^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int x\cos^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int x^2\sin^2(ax)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x\cos(2ax)}{4a^2} - \frac{(-1+2a^2x^2)\sin(2}{8a^3}$$

Vektorilaskentaa

$$\vec A\times(\vec B\times\vec C) = (\vec A\cdot\vec C)\vec B - (\vec A\cdot\vec B)\vec C$$

$$(\vec A\times\vec B)\times\vec C = (\vec A\cdot\vec C)\vec B - (\vec B\cdot\vec C)\vec A$$

$$\vec A\cdot(\vec B\times\vec C) = (\vec A\times\vec B)\cdot\vec C$$

$$(\vec A\times\vec B)\cdot(\vec C\times\vec D) = \begin{vmatrix}\vec A\cdot\vec C & \vec A\cdot\vec D\\ \vec B\cdot\vec C & \vec B\cdot\vec D\end{vmatrix}$$

$$\vec\nabla(\psi\xi) = \xi\vec\nabla\psi + \psi\vec\nabla\xi$$

$$\vec\nabla\times(\psi\vec A) = \vec\nabla\psi\times\vec A + \psi\vec\nabla\times\vec A$$

$$\vec\nabla\cdot(\psi\vec A) = \vec\nabla\psi\cdot\vec A + \psi\vec\nabla\cdot\vec A$$

$$\vec\nabla\cdot(\vec A\times\vec B) = \vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec A) - \vec A\cdot(\vec\nabla\times\vec B)$$

$$\vec\nabla(\vec A\cdot\vec B) = (\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B + (\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A + \vec A\times(\vec\nabla\times\vec B) + \vec B\times(\vec\nabla\times\vec A)$$

$$\vec\nabla\times(\vec A\times\vec B) = \vec A(\vec\nabla\cdot\vec B) - \vec B(\vec\nabla\cdot\vec A) + (\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A - (\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B$$

$$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) = \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \nabla^2\vec A$$

Trigonometeriaa

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

   $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ $\quad \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$

2. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,\mathrm{c}$

   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\mathrm{c}$

   $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ $\quad \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan}$

   $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$ $\quad \cot(\alpha-\beta) = -\dfrac{\cot\alpha\cot\beta +}{\cot\alpha - \cot}$

3. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad \sin\alpha - \sin\beta = 2$

   $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad \cos\alpha - \cos\beta = -$

4. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

   $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

   $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

5. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

   $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\quad \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

   $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ $\quad \tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

   $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$ $\quad \cot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$