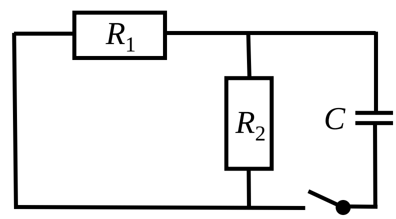
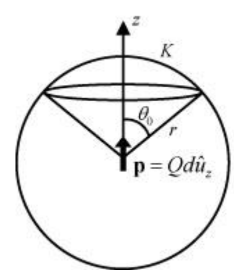
Merkitse jokaiseen vastauspaperiin nimi, opiskelijanumero, laitos ja kurssin koodi
Mainitse myös suorititko laskuharjoituksia keväällä 2010

1. Vastaa lyhyesti ja selkeästi seuraaviin kysymyksiin.
a) Kirjoita Gaussin laki sähkökentälle integraalimuodossa ja tulkitse se fysikaalisesti. (1p)
b) Millainen on ferromagneettisen aineen mikroskooppinen koostumus? Mitä sovelluksia tällaisella aineella on? (1p)
c) Staattinen sähkökenttä on pyörteetön. Miten tämä kirjoitetaan matemaattisesti? Perustele huolella, että kaavasi kuvaa pyörteettömyyttä. (1p)
d) Mitä sähkövuon tiheys ja magneettivuon tiheys kuvaavat? (1p)
e) Virtasilmukka asetetaan homogeeniseen magneettikenttän. Selitä sanoin, kuvin ja kaavoin mitä tapahtuu. (1p)
f) Varattu hiukkanen liikkuu sähkömagneettisessa kentässä. Minkälainen voima siihen kohdistuu? (1p)

2. Oheisen kuvan mukaisessa piirissä olevan kondensaattorin jännite on aluksi V_0. Kun kytkin suljetaan kondensaattori purkautuu. Osoita, että kaikki kondensaattorin energia muuttuu vastuksissa lämmöksi. (6p)



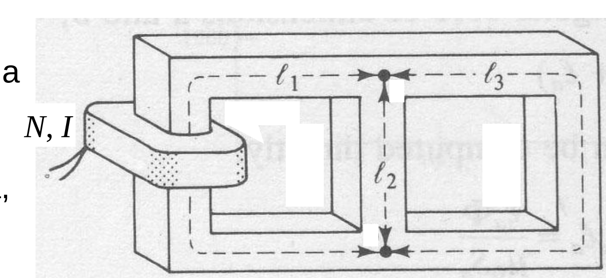
3. Stattisen sähköisen dipolin kanssa samankeskiseltä pallopinnalta on erotettu kalotti K, jonka reunaviivaetäisyys on r ja kulma akseliin nähden on θ_0 (ks. kuva). Johda kalotin kautta kulkevan sähkövuon Φ lauseke. (6p)



Vihje: dipolin kentän lauseke on muotoa: $\mathbf{E} = -\dfrac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon r^3} + \dfrac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon r^5}$

4. Ratkaise kaikki kohdat.
a) Määritä magneettikentän voimakkuus a-säteisen virtasilmukan keskipisteessä. (2p)
b) Johda sähkövuon määritelmästä lähtien lauseke pistevarauksen sähkökentälle. (2p)
c) Pitkän tiiviisti kierretyn käämin kierrostiheys on n. Määritä magneettikentän voimakkuus käämin sisällä. (2p)

5. Käämille (virta I, N kierrosta) on asetettu oheisen kuvan mukainen sydän materiaalista, jonka permittiivisyys on μ. Sydämen poikkipinta-ala on kaikkialla sama (A) ja lisäksi pituuksille pätee $l_1 = l_3$. Määritä magneettikentän voimakkuus osuuksilla l_1, l_2, ja l_3. Voit olettaa, että magneettikenttä on vakio poikkipinta-alalla. (6p)



1.

a) • $\oiint_A \bar{D}\cdot d\bar{A} = q$ (1/2p)

• sähkövaraus aiheuttaa sähkökentän (1/2p)

b) • Ferromagneettinen aine koostuu alueista (domain) joissa atomaariset dipolimomentit ovat samaan suuntaan. (1/2p)

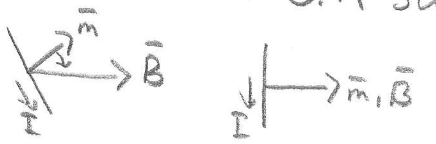
• Esim. sähkömagneetti, kestomagneetti (1/2p)

c) • $\oint_L \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$ (1/2p)

• jos $\bar{E}$:n muoto on esim. ympyrä (tai muu silmukka) ei tulos voi olla nolla. (1/2p)

d) • vuo kuvaa lähteen voimakkuutta ja vuontiheys lähteen vaikutusta tietyssä kohdassa. (1p)

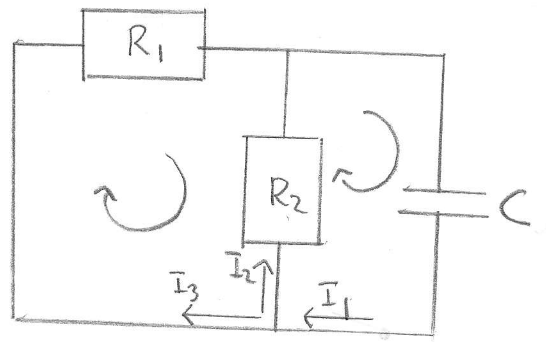
e) • virtasilmukalla on magneettinen momentti $\bar{m} = IA\hat{n}$ ja magneettikentässä silmukkaan kohdistuu vääntömomentti $\bar{\tau} = \bar{m}\times\bar{B}$ joka pyrkii kääntämään momentin $\bar{B}$:n suuntaiseksi. (1/2p)



(1/2p)

f) • Lorentz-voima $\bar{F} = q\bar{E} + q\bar{v}\times\bar{B}$ (1p)

(2.)



- Energia kondensaattorissa kun kytkin on auki

$$W = \frac{1}{2} C V_0^2 \qquad (1/2\,p)$$

- kytkin suljetaan → virta kuten kuvassa

Kirchhoff I: $\quad I_1 = I_2 + I_3 \qquad (1) \qquad (1p)$

Kirchhoff II:
$$\begin{cases} \dfrac{q(t)}{C} - I_2 R_2 = 0 & (2) \qquad (1p) \\ -I_2 R_2 + I_3 R_1 = 0 & (3) \qquad (1p) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} - R_2 \frac{dI_2}{dt} = 0 \Rightarrow -\frac{I_1}{C} - R_2 \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$(3) \Rightarrow I_3 = \frac{R_2}{R_1} I_2$$

$$(1) \Rightarrow I_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} I_2$$

$$\Rightarrow \frac{dI_2}{dt} = -\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2} I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = I_{2,0}\, e^{-\frac{R_1+R_2}{C R_1 R_2} t} \qquad (1p)$$

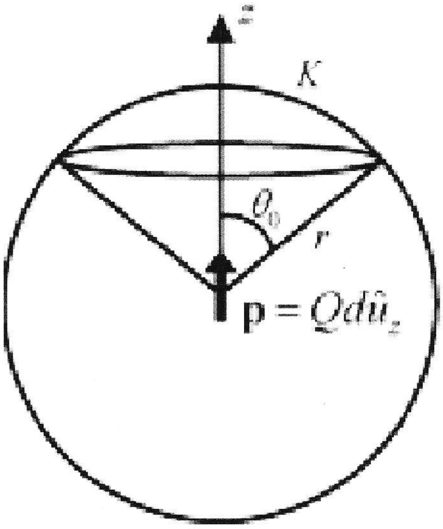
R_2:ssa lämmöksi muuttuu: $W_2 = \int_0^\infty R_2 I_2^2 \, dt = \dfrac{C R_1 R_2^2 I_{2,0}^2}{2(R_1 + R_2)} \qquad (1/2\,p)$

R_1:issä lämmöksi muuttuu: $W_1 = \int_0^\infty R_1 I_3^2 \, dt = \dfrac{R_2}{R_1} \cdot \dfrac{C R_1 R_2^2 I_{2,0}^2}{2(R_1 + R_2)} \qquad (1/2\,p)$

$\left(I_3 = \frac{R_2}{R_1} I_2\right)$

$$W_1 + W_2 = \frac{C R_1 R_2^2 I_{2,0}^2}{2(R_1 + R_2)} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{2} C \underbrace{R_2^2 I_{2,0}^2}_{\text{jännite } R_2\text{:in yli alussa} = V_0} = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad \square \qquad (1/2\,p)$$

3.



sähkövuo

$$\Phi = \iint \bar{D} \cdot d\bar{A} \qquad (1p.)$$

$$d\bar{A} = r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, \hat{u}_r \qquad (1\tfrac{1}{2}p)$$

Dipolin sähkökenttä on $(p = Qd)$

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\hat{u}_z - 3\hat{u}_r \underbrace{(\hat{u}_r \cdot \hat{u}_z)}_{\cos\theta}\right] \qquad (\tfrac{1}{2}p)$$

Sähkövuon tiheys on $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}$ $\qquad (\tfrac{1}{2}p)$

$$\Rightarrow \Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0} \varepsilon_0 \bar{E} \cdot \hat{u}_r \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \qquad (1p.)$$

$$= -\frac{p}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0}\Big[\underbrace{\hat{u}_z \cdot \hat{u}_r}_{\cos\theta} - 3\underbrace{\hat{u}_r \cdot \hat{u}_r}_{=1}\cos\theta\Big]\sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{p}{2\pi r}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}\underbrace{\int_0^{\theta_0}\cos\theta \sin\theta \, d\theta}_{=\frac{1}{2}\sin^2\theta_0}$$

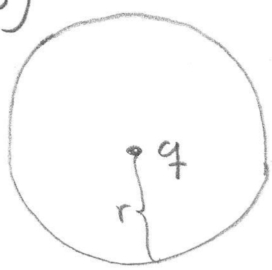
kulmaintegrointi ok (1p)

$$\underline{\Phi = \frac{p}{2r}\sin^2\theta_0} \qquad (\tfrac{1}{2}p)$$

4. a) Biot-Savartin laki $\bar{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\bar{l} \times \hat{r}}{r^2}$ (1p)

$\Rightarrow \bar{H} = \frac{I}{2a} \hat{n}$ (1/2p) ($\hat{n}$ on paperista katsojaa kohti osoittava yksikkövektori) (1/2p)

b)

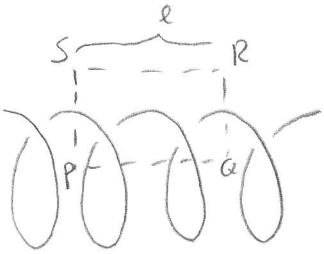


- symmetrian perusteella vuontiheys on pallolla kaikkialla yhtä suuri ja suunta radiaalinen (1/2p)
- kokonaisvuo $\Phi = q$ (1/2p)

$\Rightarrow$ vuontiheys $\bar{D} = \frac{\Phi}{4\pi r^2} \hat{r} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$ (1/2p)

$\Rightarrow$ sähkökenttä $\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{r}$ (1/2p)

c)



- Amperen laki reitille PQRS (1/2p)
- virta polun läpi nlI (1/2p)

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_P^Q \bar{H} \cdot d\bar{l} + \int_Q^R \bar{H} \cdot d\bar{l} + \underbrace{\int_R^S \bar{H} \cdot d\bar{l}}_{=0} + \int_S^P \bar{H} \cdot d\bar{l} = nlI$$

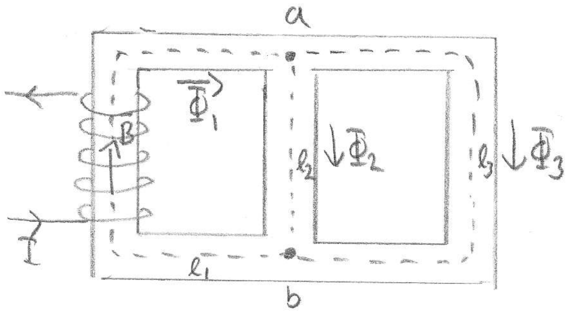
$=0$, RS kaukana käämistä (1/4p)

kumoavat (1/4p)

$$= \underbrace{\int_P^Q \bar{H} \cdot d\bar{l}}_{Hl} = nlI$$, $\bar{H}$ vakio & $\bar{H} \uparrow\uparrow d\bar{l}$ (1/4p)

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{H = nI}}$ (1/4p)

(5.)



- Virta I
- N silmukkaa
- ytimen permeabiliteetti on μ
- poikkiala on vakio A
- $l_1 = l_3$

Amperen laki: $\oint_{l_1+l_2} \bar{H}\cdot d\bar{l} = NI \Rightarrow H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI$ (1) [1½p]

$\oint_{l_1+l_3} \bar{H}\cdot d\bar{l} = NI \Rightarrow H_1 l_1 + H_3 l_3 = NI$ (2) [1½p]

Vuo säilyy: $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \Rightarrow B_1 = B_2 + B_3 \Rightarrow H_1 = H_2 + H_3$ (3) [1½p]

(sama ala) (sama μ)

(1) – (3)

$\Downarrow$

$$H_1 = \frac{l_1 + l_2}{l_1(l_1 + 2l_2)} NI \quad [½p]$$

$$H_2 = \frac{1}{l_1 + 2l_2} NI \quad [½p]$$

$$H_3 = \frac{l_2}{l_1(l_1 + 2l_2)} NI \quad [½p]$$