Aalto yliopiston teknillinen korkeakoulu Gripenberg/Siljander
Mat-1.1040 L4
2. välikoe 30.3.2010

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskin (yo-kirjoituksissa hyväksytty) on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Olkoon $\Omega = \{\, (x,y) : 0 < x < 1,\, 0 < y < 1 \,\}$. Millä positiivisilla luvuilla μ ja ν funktio $\varphi_{\mu,\nu}(x,y) = \sin(\mu x)\sin(\nu y)$ on ominaisarvoprobleeman

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{joukossa} \quad \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{reunalla} \quad \partial\Omega,$$

ominaisfunktio ja mikä on silloin vastaava ominaisarvo? Löytyykö tällä tavalla ominaisfunktioita ψ_1 ja ψ_2, jotka liittyvät samaan ominaisarvoon, mutta joille ei päde $\psi_1 = c\psi_2$ jollakin vakiolla c?

2. Oletetaan, että funktio g on jatkuva ja rajoitettu välillä $(0,\infty)$. Johda yhtälön

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad x > 0, \end{cases}$$

ratkaisulle kaava $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right) g(y)\,\mathrm{d}y$, (käyttäen hyväksi esim. jotain muuta tunnettua ratkaisukaavaa). (Vaihtoehtoisesti, mutta tämä on hankalampaa, osoita, että tämä kaava antaa ratkaisun.) Jos v on saman yhtälön (alku- ja reunaehtoineen) toinen ratkaisu, niin mitä on funktiosta v oletettava, jotta maksimiperiaatteen nojalla voitaisiin päätellä että $u = v$? (Vastaukseksi ei kelpaa oletus $u = v$.)

3. Olkoon u yhtälön $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$ ratkaisu kun $0 < x < 1$ siten, että $u(0,t) = u_x(1,t) = 0$ kun $t > 0$. Mitä voidaan sanoa funktiosta $e(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_x(x,t)^2 + u_t(x,t)^2)\,\mathrm{d}x$? Perustele! Voit olettaa, että u on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva.

4. Määritä yhtälön $u_t + (u+u^2)_x = 0$ (distribuutio)ratkaisu kun $x \in \mathbb{R}$ ja $t > 0$ (joka on (b)-kohdassa jatkuva) olettaen, että

(a) $u(x,0) = 1$ kun $x < 0$ ja $u(x,0) = -1$ kun $x > 0$.
(b) $u(x,0) = -1$ kun $x < 0$ ja $u(x,0) = 1$ kun $x > 0$.

Toiselta sivulta löytyy pari (satunnaisesti valittua?) kaavaa!

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln(|\mathbf{x}|), & d = 2 \\ \dfrac{1}{(d-2)a(S^{d-1})}\,\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}}, & d \geq 3, \end{cases}$$

$$u(\mathbf{x},t) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} u_0(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0,$$

$$u(\mathbf{x},t) = (\mathrm{i}4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} u_0(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{t}{2}\frac{1}{v(B(\mathbf{x},t))} \int_{B(\mathbf{x},t)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}} \Big(g(\mathbf{y}) + Dg(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{x}) + t h(\mathbf{y}) \Big)\,\mathrm{d}\mathbf{y},$$

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{a(\partial B(\mathbf{x},t))} \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} \left(g(\mathbf{y}) + Dg(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{x}) + t h(\mathbf{y}) \right)\,\mathrm{d}S(\mathbf{y}).$$