Aalto yliopiston teknillinen korkeakoulu Gripenberg/Siljander
Mat-1.1040 L4
2. välikoe 30.3.2010

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskin (yo-kirjoituksissa hyväksytty) on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. Olkoon $\Omega = \{\, (x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \,\}$. Millä positiivisilla luvuilla μ ja ν funktio $\varphi_{\mu,\nu}(x,y) = \sin(\mu x)\sin(\nu y)$ on ominaisarvoprobleeman

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{joukossa} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{reunalla} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

ominaisfunktio ja mikä on silloin vastaava ominaisarvo? Löytyykö tällä tavalla ominaisfunktioita ψ_1 ja ψ_2, jotka liittyvät samaan ominaisarvoon, mutta joille ei päde $\psi_1 = c\psi_2$ jollakin vakiolla c?

Ratkaisu: Derivoimalla todetaan, että

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi_{\mu,\nu}(x,y) &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi_{\mu,\nu}(x,y) \\ &= \mu^2\varphi_{\mu,\nu}(x,y) + \nu^2\varphi_{\mu,\nu}(x,y) = (\mu^2+\nu^2)\varphi_{\mu,\nu}(x,y). \end{aligned}$$

Selvästikin $\partial\Omega = \{\, (x,y) : x = 0,\ 0 \le y \le 1 \,\} \cup \{\, (x,y) : y = 0,\ 0 \le x \le 1 \,\} \cup \{\, (x,y) : x = 1,\ 0 \le y \le 1 \,\} \cup \{\, (x,y) : y = 1,\ 0 \le x \le 1 \,\}$. Kun $x = 0$ tai $y = 0$ niin $\varphi_{\mu,\nu}(x,y) = 0$ mutta kun $x = 1$ niin $\varphi_{\mu,\nu}(x,y) = 0$ kaikilla y ainoastaan jos $\sin(\mu) = 0$. Tästä seuraa, että $\mu = \pi m$ missä $m = 1, 2, 3, \ldots$. Samalla tavalla nähdään, että kun $y = 1$ niin $\varphi_{\mu,\nu}(x,y) = 0$ kaikilla x ainoastaan jos $\sin(\nu) = 0$ Tästä seuraa, että $\nu = \pi n$ missä $n = 1, 2, 1, \ldots$. Näin ollen saadaan ominaisfunktio ainoastaan jos $\mu = \pi m$ ja $\nu = \pi n$ missä $m, n = 1, 2, 3 \ldots$. Vastaava ominaisarvo on silloin $\lambda_{m,n} = \pi^2 m^2 + \pi^2 n^2)$.

Jos nyt esimerkiksi $m = 1$ ja $n = 2$ niin $\lambda = 5\pi^2$ mutta sama ominaisarvo saadaan myös jos $m = 2$ ja $n = 1$ mutta $\sin(\pi x)\sin(2\pi y) \neq c\sin(2\pi x)\sin(\pi y)$ eli samaan ominaisarvoon voi liittyä monta erilaista ominaisfunktiota.

---

2. Oletetaan, että funktio g on jatkuva ja rajoitettu välillä $(0,\infty)$. Johda yhtälön

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad x>0, t>0, \\ u(0,t)=0, \quad t>0, \\ u(x,0)=g(x), \quad x>0, \end{cases}$$

ratkaisulle kaava $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}\right) g(y)\,\mathrm{d}y$, (käyttäen hyväksi esim. jotain muuta tunnettua ratkaisukaavaa). (Vaihtoehtoisesti, mutta tämä on hankalampaa, osoita, että tämä kaava antaa ratkaisun.) Jos v on saman yhtälön (alku- ja reunaehtoineen) toinen ratkaisu, niin mitä on funktiosta v oletettava, jotta maksimiperiaatteen nojalla voitaisiin päätellä että $u=v$? (Vastaukseksi ei kelpaa oletus $u=v$.)

Ratkaisu: Määritellään $g(x) = -g(-x)$ kun $x<0$ (miten g määritellään kun $x=0$ on epäolennaista) ja ratkaistaan yhtälö $u_t = u_{xx}$ kun $t>0$ ja $x\in\mathbb{R}$ alkuarvolla $u(x,0)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Silloin ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(-y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} g(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}\right) g(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Jos tähän sijoitetaan $x=0$ niin saadaan

$$u(0,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}} - \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4t}}\right) g(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

joten reunaehto on voimassa.

Koska g oletuksen mukaan oli rajoitettu niin myös $u(x,t)$ on rajoitettu kaikilla $x>0$ ja $t>0$ joten jos $v(x,t)$ on toinen ratkaisu jolle pätee $|v(x,t)| \le A\mathrm{e}^{ax^2}$ joillakin vakioilla A ja a niin samanlainen ylärja on voimassa myös erotukselle $u-v$ ja silloin maksimiperiaatteesta seuraa, että $u=v$ koska $u(x,t)-v(x,t)=0$ kun $t=0$ tai $x=0$ oletuksen mukaan.

---

3. Olkoon u yhtälön $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$ ratkaisu kun $0 < x < 1$ siten, että $u(0,t) = u_x(1,t) = 0$ kun $t > 0$. Mitä voidaan sanoa funktiosta $e(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_x(x,t)^2 + u_t(x,t)^2)\,\mathrm{d}x$? Perustele! Voit olettaa, että u on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva.

Ratkaisu: Derivoimalla todetaan, että

$$e'(t) = \int_0^1 (u_x(x,t)u_{xt}(x,t) + u_t(x,t)u_{tt}(x,t))\,\mathrm{d}x,$$

ja osittaisintegroinnilla, että

$$\int_0^1 u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\,\mathrm{d}x = \Big/_0^1 u_x(x,t)u_t(x,t) - \int_0^1 u_{xx}(x,t)u_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Koska oletuksen mukaan $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$ niin saadaan

$$\begin{aligned} e'(t) = \Big/_0^1 u_x(x,t)u_t(x,t) + \int_0^1 (u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t))u_t(x,t)\,\mathrm{d}x \\ = u_x(1,t)u_t(1,t) - u_x(0,t)u_t(0,t). \end{aligned}$$

Reunaehdoista seuraa suoraan että $u_x(1,t) = 0$. Koska lisäksi $u(0,t) = 0$ kaikilla t niin pätee myös $u_t(0,t) = 0$ eli $e'(t) = 0$ kaikilla t joten $e(t)$ on vakio.

---

4. Määritä yhtälön $u_t + (u + u^2)_x = 0$ (distribuutio)ratkaisu kun $x \in \mathbb{R}$ ja $t > 0$ (joka on (b)-kohdassa jatkuva) olettaen, että

(a) $u(x,0) = 1$ kun $x < 0$ ja $u(x,0) = -1$ kun $x > 0$.
(b) $u(x,0) = -1$ kun $x < 0$ ja $u(x,0) = 1$ kun $x > 0$.

Ratkaisu: Tässä tapauksessa $f(u) = u + u^2$ joten $f'(u) = 1 + 2u$. Näin ollen karakteristikat toteuttavat yhtälön $\xi'(t) = f'(u(\xi(t),t)) = f'(u(\xi(0),0,)) = 1 + 2u(\xi(0),0)$. (a)-kohdassa tämä merkitsee sitä, että $\xi'(t) = 3$ jos $\xi(0) < 0$ ja $\xi'(t) = -1$ jos $\xi(0) > 0$ joten karakteristikat leikkaavat toisiaan ja jatkuvaa ratkaisua ei ole. Rankine-Hugoniotin ehdon mukaan epäjatkuvuuskäyrälle $x = h(t)$ saadaan ehdoksi

$$h'(t) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 + 1 - (-1 + 1)}{2} = 1,$$

joten ratkaisuksi saadaan

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < t, \\ -1, & x > t. \end{cases}$$

(b)-kohdassa saadaan $\xi'(t) = -1$ jos $\xi(0) < 0$ ja $\xi'(t) = 3$ jos $\xi(0) > 0$ joten osittainen ratkaisu on

$$u(x,t) = \begin{cases} -1, & x < -t, \\ 1, & x > 3t. \end{cases}$$

Kun $-t < x < 3t$ haetaan ratkaisu muodossa $u(x,t) = g(\frac{x}{t})$ ja sijoittamalla tämä lauseke yhtälöön saadaan ehdoksi $f'(g(\frac{x}{t})) = \frac{x}{t}$ josta päätellään, että $g(r) = \frac{1}{2}(r-1)$ jolloin

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{t} - 1\right), \quad -t \leq x \leq 3t.$$