T-61.3040 Signaalien tilastollinen mallinnus

Tentti 3.9.2009

Tentissä saa olla mukana laskin (ei ohjelmoitava tai muisti tyhjä) ja matematiikan perustaulukot (ei taulukoita joissa on kurssin aiheisiin suoraan liittyvää materiaalia). Esimerkiksi Råde & Westergrenin kirja "BETA Mathematics Handbook for Science and Engineering" sisältää materiaalia, joka liittyy kurssin aiheisiin liian suoraan; näin ollen tuota kirjaa EI saa olla mukana tentissä. Tentin tulokset ilmoitetaan aikanaan Noppa-järjestelmän kautta.

1. (max 6p)

Selitä *lyhyesti* seuraavat asiat menemättä tarpeettomasti yksityiskohtiin:

i) LMS-algoritmi (2p)

ii) Väljässä mielessä stationäärisyys (WSS) (2p)

iii) Woldin hajotelma (2p)

2. (max 6p)

Olet havainnut reaaliarvoisesta prosessista $x(n)$ seuraavat arvot: $x(0) = 4$, $x(1) = -2$, $x(2) = 2$.

i) Estimoi 3×3-kokoinen autokorrelaatiomatriisi niin, että tulos on positiivisemidefiniitti. Osoita, että tulos on positiivisemidefiniitti. (2p)

ii) Mallinna prosessi $x(n)$ AR(2)-prosessina. (2p)

iii) Mitkä ovat mallinnetun prosessin varianssi $\mathrm{Var}(x(n))$ ja ehdollinen varianssi $\mathrm{Var}(x(3)|x(2), x(1), x(0))$? (2p)

3. (max 6p)

Vastaa seuraaviin väitteisiin joko "tosi" tai "epätosi" tai jätä vastaamatta. Oikea vastaus antaa yhden pisteen, väärä -1 pistettä ja vastaamatta jättäminen nolla pistettä. Tästä tehtävästä saamasi kokonaispistemäärä ei kuitenkaan voi laskea negatiiviseksi; kokonaispistemäärä on vähintään nolla. Vastauksia ei tarvitse perustella.

a) Tiukassa mielessä stationäärinen prosessi on aina myös väljässä mielessä stationäärinen.

b) Jos prosessin $x(n) = d(n) + v(n)$ Wiener-suodatuksessa kohina $v(n)$ on nollakeskiarvoista valkoista kohinaa joka ei korreloi halutun signaalin $d(n)$ kanssa, niin Wiener-suodin voidaan ratkaista pelkästään kohinan autokorrelaation $r_v(k)$ ja halutun signaalin autokorrelaation $r_d(k)$ avulla.

c) Periodogrammin resoluutio paranee kun havaintojen lukumäärä kasvaa.

d) Wiener-suotimen avulla saadaan kohina poistettua signaalista kokonaan myös halutun signaalin taajuuskaistalla.

e) Jos muodostetaan kaksi ARMA-prosessia eri parametreilla, saadaan aina eri prosessit.

f) Sekä tehospektrin että pseudospektrin integraali jonkin taajuuskaistan yli kertoo prosessin tehon tällä kaistalla.

4. (max 6p)

Prosessi $x(n) = A_1 \exp(jn\omega_1) + A_2 \exp(jn\omega_2) + v(n)$ koostuu kahdesta kompleksisesta sinisignaalista valkoisessa kohinassa. Kertoimet ovat muotoa $A_1 = |A_1|e^{j\phi_1}$ ja $A_2 = |A_2|e^{j\phi_2}$. Vaiheet ϕ_1 ja ϕ_2 ovat välille $[-\pi, \pi]$ tasaisesti jakautuneita satunnaislukuja (ne arvotaan uudelleen jokaiselle prosessin realisaatiolle, mutta kukin realisaatio käyttää samoja kertoimia A_1 ja A_2 eri hetkillä n). Prosessin autokorrelaatiomatriisi on

$$R_x = \begin{bmatrix} 6 & -\sqrt{3}j & -\sqrt{3}j \\ \sqrt{3}j & 6 & -\sqrt{3}j \\ \sqrt{3}j & \sqrt{3}j & 6 \end{bmatrix}$$

Tiedetään, että taajuudet ω_1 ja ω_2 ovat erisuuria ($\omega_1 < \omega_2$), ja ne on valittu kolmesta vaihtoehdosta: $\pi/6$, $\pi/3$ ja π. Lisäksi tiedetään, että matriisin pienin ominaisarvo on 3 ja sitä vastaava ominaisvektori on

$$C \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3}j \\ 2 \\ a \end{bmatrix}$$ missä a on jokin kompleksiluku ja kerroin C normalisoi vektorin pituuden olemaan 1.

i) Ratkaise Pisarenkon menetelmällä, mitkä kolmesta mahdollisesta taajuudesta ovat sinisignaalien oikeat taajuudet ω_1 ja ω_2. (4.5p)

ii) Nyt tunnet sinisignaalien taajuudet. Havaitset yhden prosessin realisaation, ja saat siitä havainnot $x(0)$ ja $x(1)$. Selitä, miten voit havaintojen perusteella estimoida kertoimet A_1 ja A_2. (1.5p)

Mahdollisesti tarvittavia kaavoja:

ω	$\sin(\omega)$	$\cos(\omega)$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$