

Tentti 11.5.2009 klo 16-20.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

1. a) Etsi kaikki kompleksiluvut  $z$ , jotka toteuttavat yhtälön

$$\frac{\bar{z}}{z} = -1.$$

- b) Sievennä  $(\cos(x) + i \sin(x))^2$  muotoon, jota käyttäen voit perustella kaavat

$$\begin{cases} \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2, \\ \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x). \end{cases}$$

2. a) Laske matriisitulo  $[A][B]$ , missä

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -5 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- b) Etsi matriisin  $[A]$  käänteismatriisi.

3. a) Mistä tiedetään, että yhtälöllä  $x + \sin(x) = 1$  on täsmälleen yksi ratkaisu?

- b) Etsi yhtälön

$$x + \sin(x) - 1 = 0$$

ratkaisua Newton-iteraation avulla lähtien alkuarvauksesta  $x_0 = 0$ .  
(Riittää, kun lasket luvut  $x_1$  ja  $x_2$  eli kaksi iteraatiokierrosta!)

4. Sijoita  $u = \ln(x)$  integraaliin

$$\int_1^e x^{15} (\ln(x))^{10} dx$$

— näin saatua integraalia ei tarvitse laskea.

5. a) Laske osamurtokehitelmää käyttäen

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2 - 5x} dx.$$

- b) Laske kuulan

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

tilavuus integraalin avulla.

(Vihje: tulkitse  $B$  sopivaksi pyörähdykappaleeksi.)